Arbeitsblatt | KLASSE 8–10

Wahrscheinlichkeitsrechnung

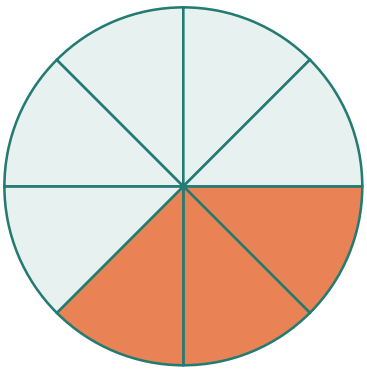
Grundlagen

Laplace, Pfadregel und Summenregel

Bei einem Laplace-Versuch sind alle einzelnen Ergebnisse gleich wahrscheinlich. Dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die Anzahl der günstigen Ergebnisse geteilt durch die Anzahl aller möglichen Ergebnisse.
Pfadregel: Multipliziere die Zweigwahrscheinlichkeiten entlang eines Pfads.
Summenregel: Addiere die Wahrscheinlichkeiten aller disjunkten Pfade, die zum Ereignis gehören.
Beim Ziehen ohne Zurücklegen ändern sich die Anzahlen nach jedem Zug.

1 Glücksrad

Das faire Glücksrad hat acht gleich große Felder: drei Gewinne und fünf Nieten. Die Drehungen sind unabhängig.
a) Zeichne für vier Drehungen ein vollständiges Baumdiagramm mit G und N.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit der genauen Reihenfolge G–N–G–N.
c) Berechne bei fünf Drehungen die Wahrscheinlichkeit für genau zwei Gewinne.



8 gleich große Felder

3 Gewinne, 5 Nieten

P(G) = 3/8; P(N) = 5/8

2 Drei Ampeln

Stefanie überquert auf dem Schulweg drei Ampeln. Die Wahrscheinlichkeit für Grün beträgt an der ersten Ampel 1/2, an der zweiten 1/4 und an der dritten 3/5. Im vereinfachten Modell gibt es nur Grün (G) und Rot (R); die Ampelzustände sind unabhängig.
a) Zeichne ein vollständiges Baumdiagramm.
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass Stefanie an keiner Ampel warten muss?
c) Wie wahrscheinlich ist genau eine grüne Ampel?
d) Wie wahrscheinlich zeigen alle drei Ampeln dieselbe Farbe?

3 Blumenstrauß

Im Blumenladen stehen 5 Rosen (R), 3 Tulpen (T) und 6 Gladiolen (G) bereit. Für einen Strauß werden drei einzelne Blumen nacheinander gleichwahrscheinlich und ohne Zurücklegen ausgewählt.
a) Zeichne den vollständigen Wahrscheinlichkeitsbaum.
b) Wie wahrscheinlich besteht der Strauß nur aus drei Rosen? Notiere den Pfad.
c) Wie wahrscheinlich enthält er keine Gladiole?
d) Wie wahrscheinlich enthält er drei verschiedene Blumenarten? Berücksichtige alle Reihenfolgen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

4 Geschenke zufällig verteilen

Es gibt insgesamt 18 äußerlich nicht unterscheidbare Pakete: 6 wertvolle Geschenke (W), 6 Pullover (U) und 6 Mathebücher (M). Sie werden ohne Zurücklegen zufällig verteilt: Paul bekommt drei, Mary zwei und Peter ein Paket. Jede Auswahl ist gleich wahrscheinlich.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
a) Paul drei Mathebücher erhält;
b) Paul kein Mathebuch erhält;
c) Paul genau ein Mathebuch erhält;
d) Mary zwei Geschenke verschiedener Arten erhält;
e) Mary kein wertvolles Geschenk erhält;
f) Peter kein Mathebuch erhält;
g) Peter ein wertvolles Geschenk erhält.

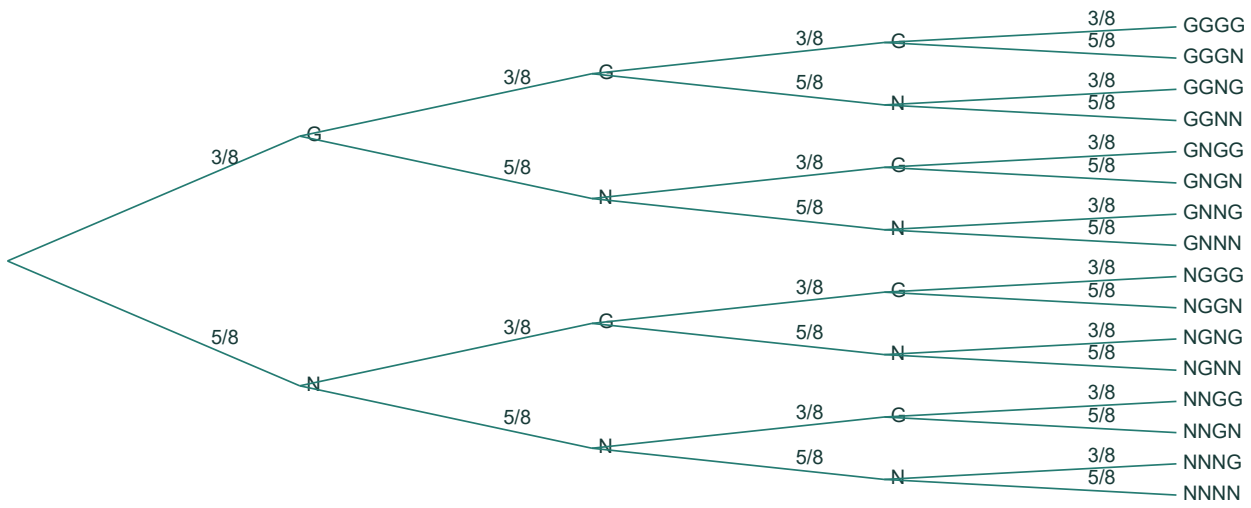
5 Fußballklebebilder

Elvira verwendet das historische Übungsmodell der Vorlage: Ein Drittel aller Bilder zeigt Spieler des FC Bayern München. Innerhalb dieser Gruppe kommt Oliver Kahn doppelt so häufig vor wie Schweinsteiger; Schweinsteiger doppelt so häufig wie Podolski und jeder der acht übrigen Spieler. Die zwei Bilder eines Pakets werden im Modell unabhängig gezogen.
Wie wahrscheinlich enthält ein Paket mit zwei Bildern
a) mindestens ein Bild von Kahn;
b) zweimal Kahn;
c) ein Bild von Schweinsteiger und eines von Podolski, in beliebiger Reihenfolge;
d) kein Bild von Kahn;
e) kein Bild eines Bayern-Spielers;
f) zwei Bayern-Spieler, die weder Kahn noch Schweinsteiger noch Podolski sind?

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1a Vier Drehungen: vollständiger Baum

G = Gewinn; N = Niete



1b/c Pfad und Ereignis

b) Für den einen festgelegten Pfad multiplizierst du vier Zweigwahrscheinlichkeiten:

$$P(GNGN) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8}$$

$$\frac{225}{4096}$$

Das entspricht etwa 5,49 %.

c) Die beiden Gewinnpositionen können auf zehn Arten unter fünf Drehungen verteilt werden. Alle zehn Pfade haben dieselbe Wahrscheinlichkeit.

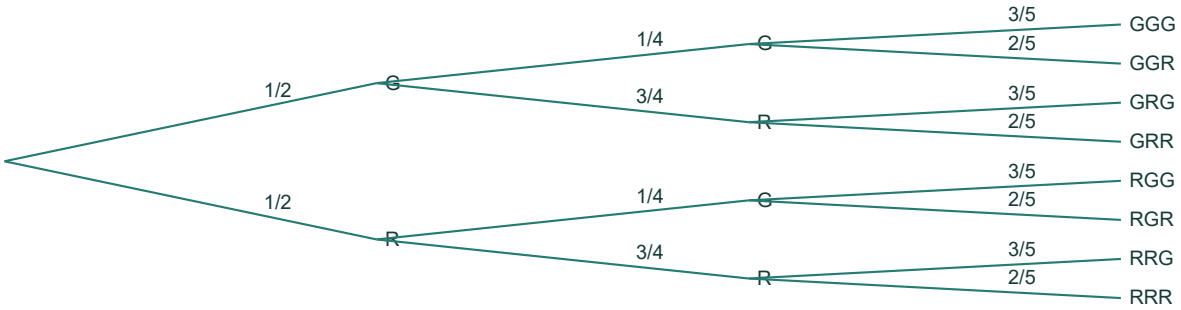
$$P(2Gewinne) = 10 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3$$

$$\frac{5625}{16384}$$

Das entspricht etwa 34,33 %.

2a Ampelbaum

Unabhängige Ampeln mit unterschiedlichen Grünwahrscheinlichkeiten



Wahrscheinlichkeitsrechnung

2b–d Ampelwahrscheinlichkeiten

b) P(GGG) = 1/2 · 1/4 · 3/5 = 3/40 = 7,5 %.
c) Die drei geeigneten Pfade sind GRR, RGR und RRG:

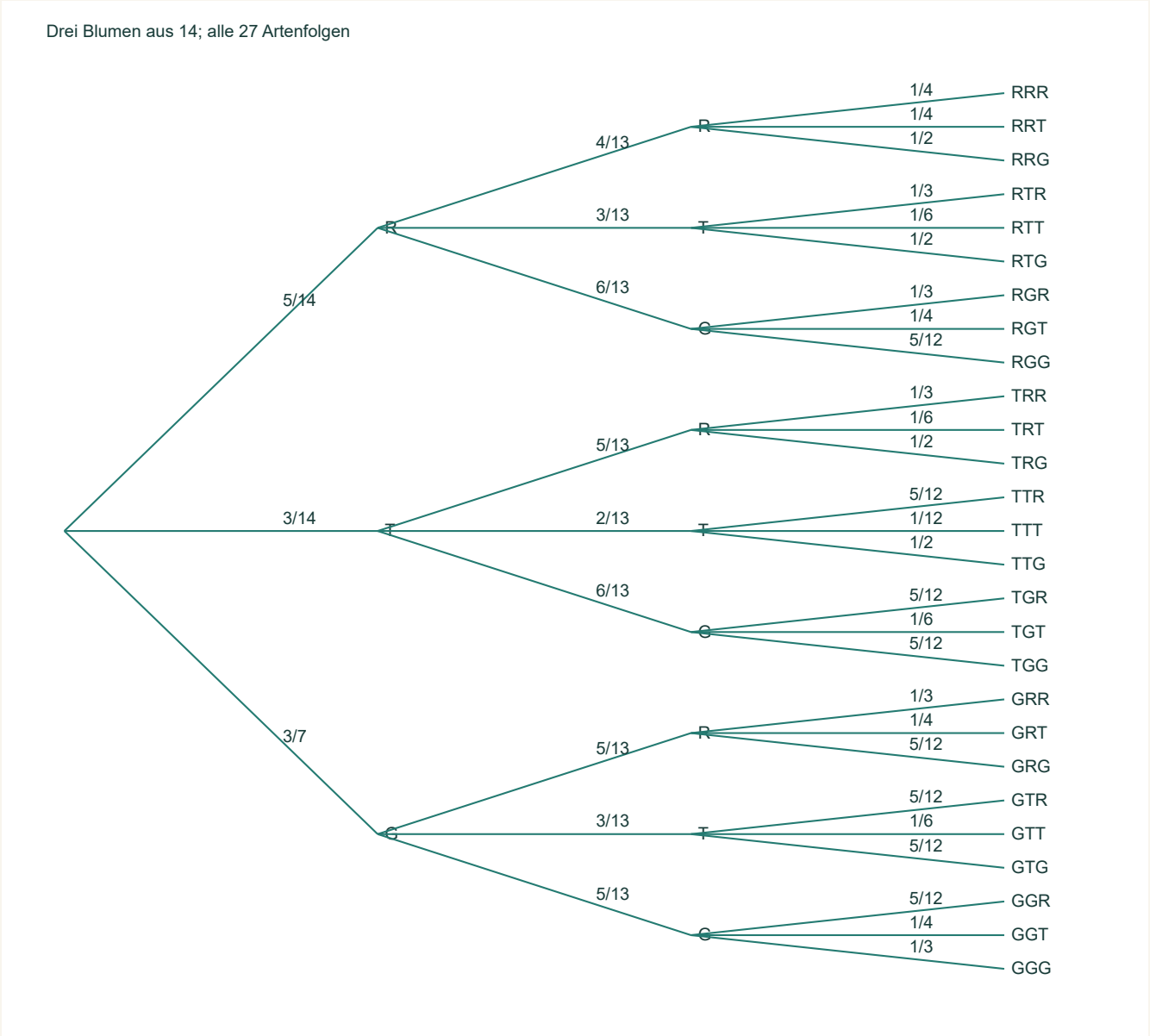
$$P(GRR) = \frac{3}{20}, P(RGR) = \frac{1}{20}, P(RRG) = \frac{9}{40}$$

Zusammen 17/40 = 42,5 %.
d) Alle gleich bedeutet GGG oder RRR. P(RRR) = 1/2 · 3/4 · 2/5 = 3/20. Zusammen: 3/40 + 3/20 = 9/40 = 22,5 %.

3a Blumenbaum ohne Zurücklegen

An den Zweigen steht jeweils „verbleibende Blumen der gewählten Art / verbleibende Blumen insgesamt“. R = Rose, T = Tulpe, G = Gladiole.

Drei Blumen aus 14; alle 27 Artenfolgen



Wahrscheinlichkeitsrechnung

3b–d Blumenwahrscheinlichkeiten

b) Einziger Pfad RRR: 5/14 · 4/13 · 3/12 = 5/182 ≈ 2,75 %.
c) Es gibt 8 Blumen, die keine Gladiolen sind. Daher 8/14 · 7/13 · 6/12 = 2/13 ≈ 15,38 %.
d) Drei unterschiedliche Arten sind RTG, RGT, TRG, TGR, GRT und GTR. Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit 5 · 3 · 6 / (14 · 13 · 12) = 15/364. Insgesamt 6 · 15/364 = 45/182 ≈ 24,73 %.

4 Geschenke: Ergebnisse

Auch Marys zufällige Auswahl hat ohne zusätzliche Bedingungen dieselbe Randverteilung wie zwei zufällig ausgewählte Pakete aus allen 18. Die vorherige Verteilung an Paul muss daher nicht einzeln aufgeschlüsselt werden.

Teil	Berechnung	Wahrscheinlichkeit
a)	6/18 · 5/17 · 4/16	5/204 ≈ 2,45 %
b)	12/18 · 11/17 · 10/16	55/204 ≈ 26,96 %
c)	3 · 6/18 · 12/17 · 11/16	33/68 ≈ 48,53 %
d)	1 − 3 · 6/18 · 5/17	12/17 ≈ 70,59 %
e)	12/18 · 11/17	22/51 ≈ 43,14 %
f)	12/18	2/3 ≈ 66,67 %
g)	6/18	1/3 ≈ 33,33 %

5 Klebebilder: Verteilung und Ergebnisse

Innerhalb der Bayern-Gruppe sind die relativen Gewichte 4 für Kahn, 2 für Schweinsteiger und je 1 für Podolski und die acht übrigen Spieler: insgesamt 15 Gewichte. Mit dem Bayern-Anteil 1/3 folgt:
P(Kahn) = 4/45, P(Schweinsteiger) = 2/45, P(Podolski) = 1/45, P(übrige acht Bayern-Spieler) = 8/45.

Teil	Berechnung	Wahrscheinlichkeit
a)	1 − (41/45)²	344/2025 ≈ 16,99 %
b)	(4/45)²	16/2025 ≈ 0,79 %
c)	2 · 2/45 · 1/45	4/2025 ≈ 0,20 %
d)	(41/45)²	1681/2025 ≈ 83,01 %
e)	(2/3)²	4/9 ≈ 44,44 %
f)	(8/45)²	64/2025 ≈ 3,16 %

Bei c) beide Reihenfolgen zählen

Schweinsteiger–Podolski und Podolski–Schweinsteiger sind zwei verschiedene Pfade. Deshalb ist der Faktor 2 nötig.