Arbeitsblatt | KLASSE 9–10

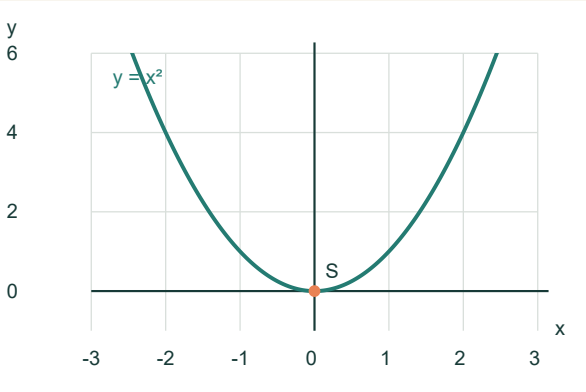
Quadratische Funktionen I

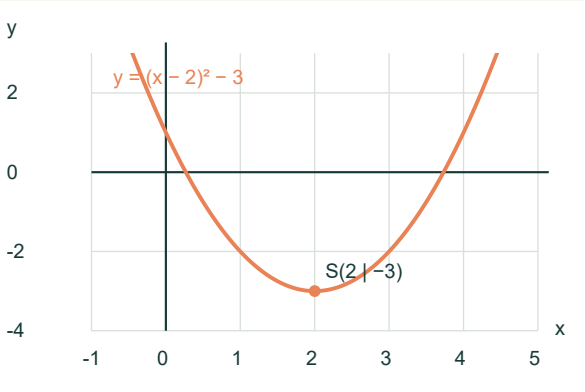
Allgemeine Form und Scheitelpunktsform

Eine quadratische Funktion hat die Form f(x) = ax² + bx + c mit a ≠ 0. Ihr Graph heißt Parabel. In der Scheitelpunktsform kannst du den Scheitelpunkt direkt ablesen:

$$f(x) = a(x-d)^2 + e$$

Scheitelpunkt S(d | e), Symmetrieachse x = d.
a > 0: nach oben geöffnet; a < 0: nach unten geöffnet.
|a| > 1: gegenüber der Normalparabel gestreckt; 0 < |a| < 1: gestaucht.





Name: _____ Datum: _____

1 Funktionstyp und Graph beschreiben

Entscheide ohne Zeichnung, ob die Funktion quadratisch, linear oder keines von beidem ist. Beschreibe den Graphen möglichst genau.

a) $f(x) = 2x^2$

b) $g(x) = (x+3)^2 - 4$

c) $h(x) = (x-2) + 3$

d) $i(x) = (x+2)(x-2)$

e) $k(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8x + 8$

f) $l(x) = x^{-2} + 1$

2 Vom Graphen zur Gleichung

Gib jeweils einen passenden quadratischen Funktionsterm an:
a) Normalparabel um 2 nach rechts und 3 nach unten verschoben.
b) Nach unten geöffnet, Streckfaktor 3/2, Scheitelpunkt S(−3 | 1).
c) Nach oben geöffnet, Stauchfaktor 1/5, Scheitelpunkt auf der x-Achse bei x = 6.

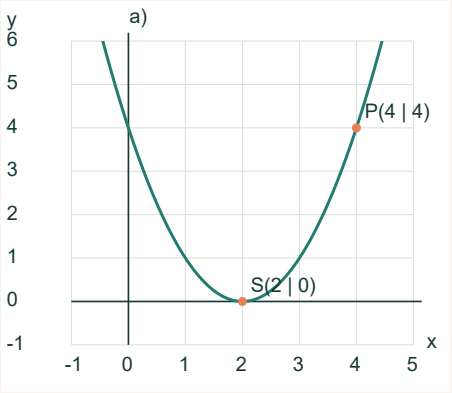
Arbeitsblatt | KLASSE 9–10

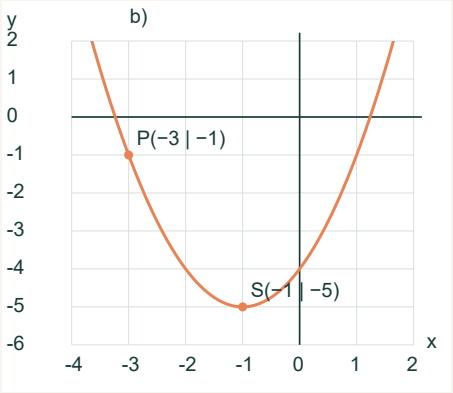
Parabeln ablesen und umformen

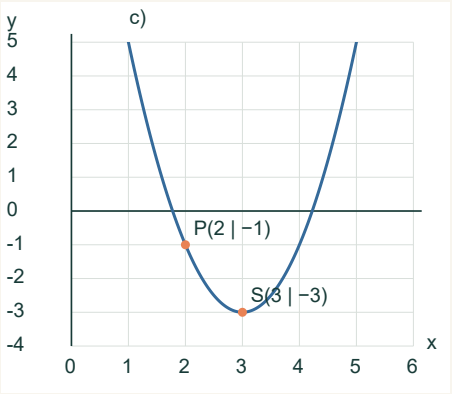
Name: _____ Datum: _____

3 Funktionsgleichungen aus Graphen

Bestimme die Funktionsgleichungen aus Scheitelpunkt und markiertem Punkt. Die Koordinaten sind an den Graphen angegeben.







So gehst du vor

Lies S(d | e) ab und setze in f(x) = a(x − d)² + e ein. Bestimme a mithilfe des zweiten Punktes.

4 Funktionsgleichung aus einer Tabelle

Bestimme eine quadratische Funktion zu den drei Wertepaaren:

x	-3	1	2
y	4	4	6,5

5 Quadratische Ergänzung

Forme in die Scheitelpunktsform um und bestimme jeweils den Scheitelpunkt.

$a)\ f(x) = x^2 + 6x + 9$

$b)\ g(x) = x^2 - 10x + 2$

$c)\ h(x) = 3x^2 + 12x + 30$

$d)\ k(x) = -5x^2 + 15x - 20$

Arbeitsblatt | KLASSE 9–10

Modellieren und Eindeutigkeit

Name: _____ Datum: _____

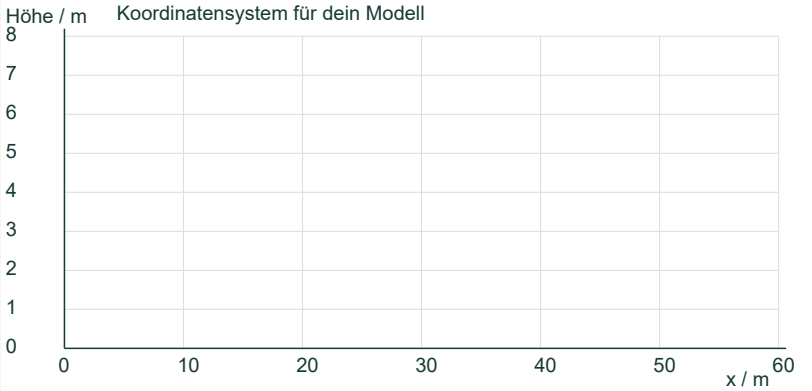
6 Flugbahn eines Fußballs

Ein Fußball startet beim Abstoß am Boden und landet 60 m weiter wieder auf derselben Bodenhöhe. Der höchste Punkt der als Parabel modellierten Flugbahn liegt 6 m über dem Boden.

a) Zeichne die Flugbahn.

b) Bestimme den Scheitelpunkt.

c) Bestimme eine passende Funktionsgleichung. Wähle den Startpunkt als Ursprung; x und f(x) werden in Metern angegeben.



7 Genügen zwei Nullstellen?

Von einer quadratischen Funktion sind nur die Nullstellen 4 und 8 bekannt. Ist die Parabel eindeutig bestimmt? Begründe deine Antwort und gib die Familie der möglichen Funktionsterme an.

Zwei hilfreiche Darstellungen

Scheitelpunktsform: $f(x) = a(x - d)^2 + e$.

Bei bekannten Nullstellen x_1 und x_2: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, mit $a \neq 0$.

Lösungen · Funktionstypen und Graphen

1 Funktionstypen

a) Quadratisch: nach oben geöffnet, Streckfaktor 2, S(0 | 0).
b) Quadratisch: Normalparabel um 3 nach links und 4 nach unten verschoben; S(−3 | −4).
c) Linear: h(x) = x + 1, Steigung 1, y-Achsenabschnitt 1.
d) Quadratisch: i(x) = x² − 4; Normalparabel um 4 nach unten verschoben; S(0 | −4).
e) Quadratisch: k(x) = ½(x + 8)² − 24; Stauchfaktor ½, S(−8 | −24).
f) Weder linear noch quadratisch: l(x) = 1/x² + 1 ist eine verschobene Potenzfunktion mit Exponent −2. Definitionsmenge: alle reellen Zahlen außer 0. Symmetrisch zur y-Achse; Asymptoten x = 0 und y = 1.

2 Gesuchte Funktionsterme

a) f(x) = (x − 2)² − 3 = x² − 4x + 1.

$$b)\ g(x) = -\frac{3}{2}(x+3)^2 + 1 = -\frac{3}{2}x^2 - 9x - \frac{25}{2}$$

$$c)\ h(x) = \frac{1}{5}(x-6)^2 = \frac{1}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{36}{5}$$

3 Scheitelpunkt und weiterer Punkt

a) S(2 | 0) ⇒ f(x) = a(x − 2)². Mit P(4 | 4): 4 = 4a ⇒ a = 1.
Also f(x) = (x − 2)² = x² − 4x + 4.
b) S(−1 | −5) ⇒ g(x) = a(x + 1)² − 5. Mit P(−3 | −1): −1 = 4a − 5 ⇒ a = 1.
Also g(x) = (x + 1)² − 5 = x² + 2x − 4.
c) S(3 | −3) ⇒ h(x) = a(x − 3)² − 3. Mit P(2 | −1): −1 = a − 3 ⇒ a = 2.
Also h(x) = 2(x − 3)² − 3 = 2x² − 12x + 15.

4 Drei Punkte aus der Tabelle

Ansatz f(x) = ax² + bx + c. Einsetzen liefert:
9a − 3b + c = 4; a + b + c = 4; 4a + 2b + c = 6,5.
Erste minus zweite Gleichung: 8a − 4b = 0 ⇒ b = 2a.
Dritte minus zweite: 3a + b = 2,5 ⇒ 5a = 2,5 ⇒ a = 0,5.
Damit b = 1 und c = 2,5. Ergebnis: f(x) = 0,5x² + x + 2,5 = 0,5(x + 1)² + 2.

Lösungen · Umformen und Modellieren

5 Scheitelpunktsformen

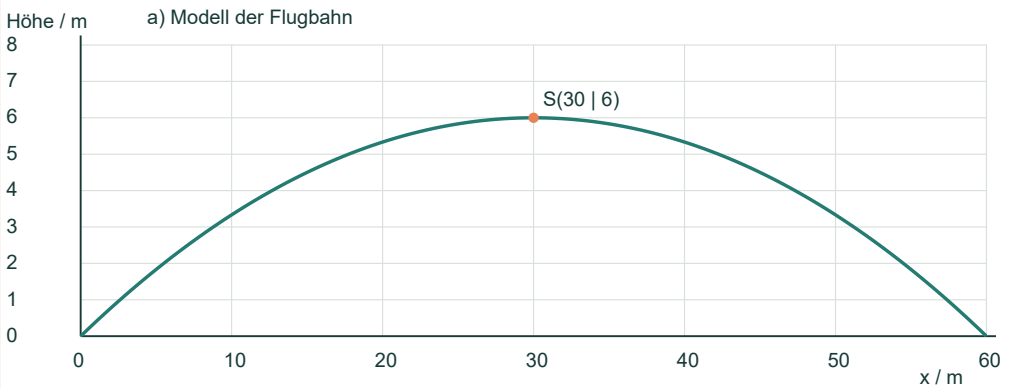
a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \Rightarrow S(-3 \mid 0)$.
b) $x^2 - 10x + 2 = (x - 5)^2 - 25 + 2 = (x - 5)^2 - 23 \Rightarrow S(5 \mid -23)$.
c) $3x^2 + 12x + 30 = 3(x^2 + 4x + 4) + 18 = 3(x + 2)^2 + 18 \Rightarrow S(-2 \mid 18)$.
d) $-5x^2 + 15x - 20 = -5(x^2 - 3x + 2{,}25) - 8{,}75$
$= -5(x - 1{,}5)^2 - 8{,}75 \Rightarrow S(1{,}5 \mid -8{,}75)$.

6 Fußballflug

b) Wegen gleicher Start- und Landehöhe liegt der Scheitelpunkt in der Mitte: S(30 | 6).
c) Ansatz $f(x) = a(x - 30)^2 + 6$. Aus $f(0) = 0$ folgt $900a + 6 = 0 \Rightarrow a = -1/150$.

$$f(x) = -\frac{1}{150}(x - 30)^2 + 6$$

Das Modell wird für $0 \le x \le 60$ verwendet. Probe: $f(0) = 0$, $f(30) = 6$ und $f(60) = 0$.



7 Nicht eindeutig bestimmt

Die Nullstellen legen den Streckfaktor und die Öffnungsrichtung nicht fest. Die möglichen Funktionsterme lauten:

$$f_a(x) = a(x - 4)(x - 8) = a(x - 6)^2 - 4a$$

Dabei ist $a \neq 0$. Die Symmetrieachse ist immer $x = 6$; der Scheitelpunkt $S(6 \mid -4a)$ hängt von a ab. Beispielsweise haben $(x - 4)(x - 8)$ und $-(x - 4)(x - 8)$ dieselben Nullstellen, aber verschiedene Graphen.