

Lernzettel: Steckbriefaufgaben

Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen · Mathe GK / LK

In fünf Schritten zur gesuchten Funktion

- 1. Ansatz wählen:** Grad bestimmen, allgemeine Funktion und benötigte Ableitungen notieren.
- 2. Übersetzen:** Angaben in Bedingungen umwandeln. Für eine eindeutige Lösung brauchst du bei n Unbekannten n voneinander unabhängige Bedingungen.
- 3. Einsetzen:** Gleichungen aufstellen und das lineare Gleichungssystem lösen.
- 4. Aufschreiben:** Berechnete Parameter in den Funktionsansatz einsetzen.
- 5. Prüfen:** Alle Bedingungen kontrollieren, geforderte Punktarten nachweisen und prüfen, ob der Grad stimmt.

Ansatz 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

Ableitungen: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a$

1. Vom Aufgabentext zur Mathematik

Angabe im Text	Bedingung für das LGS	Bedeutung
Punkt $P(x_0 y_0)$	$f(x_0) = y_0$	Punkt liegt auf dem Graphen
Ursprung $O(0 0)$	$f(0) = 0$	Beim obigen Ansatz: $d = 0$
Nullstelle bei x_0	$f(x_0) = 0$	Berühren oder Schneiden möglich
Steigung m bei x_0	$f'(x_0) = m$	Steigung der Tangente
Hoch-/Tiefpunkt $E(x_0 y_0)$	$f(x_0) = y_0$; $f'(x_0) = 0$	Punkt + waagerechte Tangente
Wendepunkt $W(x_0 y_0)$	$f(x_0) = y_0$; $f''(x_0) = 0$	Punkt + notwendige Bedingung
Wendetangente in $W(-1 2)$, Steigung $m = -3$	$f(-1) = 2$; $f''(-1) = 0$; $f'(-1) = -3$	Drei Angaben ergeben drei Bedingungen

Wichtig: Die Bedingungen für Extrem- und Wendepunkte sind zunächst notwendig. Anschließend die Punktart prüfen: z. B. Extrempunkt über einen Vorzeichenwechsel von f' oder $f'(x_0) \neq 0$; Wendepunkt über einen Vorzeichenwechsel von f'' oder $f'''(x_0) \neq 0$.

2. Beispiel mit Rechnung und Probe

Aufgabe: Eine Funktion 3. Grades geht durch $O(0 | 0)$ und besitzt in $W(-1 | 2)$ eine Wendetangente mit der Steigung $m = -3$.

Bedingungen einsetzen

I: $f(0) = 0 \rightarrow d = 0$

II: $f(-1) = 2 \rightarrow -a + b - c = 2$

III: $f'(-1) = 0 \rightarrow -6a + 2b = 0$

IV: $f'(-1) = -3 \rightarrow 3a - 2b + c = -3$

Gleichungssystem lösen

II + IV: $2a - b = -1$; aus III: $b = 3a$

Einsetzen: $2a - 3a = -1 \rightarrow a = 1$

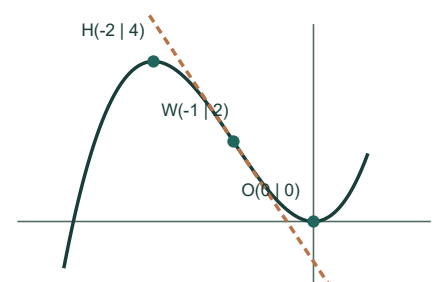
Damit $b = 3$; aus II: $-1 + 3 - c = 2 \rightarrow c = 0$

Ergebnis: $f(x) = x^3 + 3x^2$

Probe: $f(0) = 0$; $f(-1) = 2$; $f'(-1) = -3$; $f''(-1) = 0$.

Wendepunkt: $f'''(-1) = 6 \neq 0$. Der Grad ist 3, da $a = 1 \neq 0$.

Zur Skizze: $f(-2) = f(0) = 0$; $f''(-2) = -6 < 0$ (HP), $f'(0) = 6 > 0$ (TP).



Skizze: f und Wendetangente