Arbeitsblatt | KLASSE 8–10

Gleichungen I

Gleichungen lösen

Ziel: eine Gleichung schrittweise vereinfachen

Arbeite in der Grundmenge der reellen Zahlen. Beachte ausgeschlossene Nennerwerte bei Bruchgleichungen. Wende auf beide Seiten dieselbe zulässige Umformung an. Prüfe Lösungen durch Einsetzen; bei Sachaufgaben müssen sie auch zum Kontext passen.

1 Lösungsmengen bestimmen

a)

$$5\,(t-2)+6\,(t+1)-(t+2)+3=17$$

b)

$$(x-9)+(9{,}3+1{,}7x)-0{,}9\,(11x-5)=10{,}1-0{,}1\,(84x+5)$$

c)

$$[(3y+11)-3\,(7-5y)]-[5\,(2y-9)-(7y+8)]=4\,(2y+19)-(9-y)$$

d)

$$\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2}$$

e)

$$\frac{3x}{2x-4}=\frac{3x+6}{2x+2}$$

1 Lösungsmengen bestimmen · Fortsetzung

f)

$$(x-3)\,(x+3)=(x-5)^2$$

g)

$$(3t-1)^2-5t\,(t+6)=(2t+3)^2$$

h)

$$9u^2-125=4u^2$$

i)

$$x^2+x=2x^2-x$$

j)

$$\left(x^2+2x+1\right)+3x\,(x+1)^2=0$$

k)

$$x^3+8x^2-9x=0$$

2 Eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

a) 2x + 3 − 2x = 3 führt zu 0 · x = 0. Welche Lösungsmenge hat sie?
b) 2x + 3 − 2x = 4 führt zu 0 · x = 1. Welche Lösungsmenge hat sie?
c) Bestimme die Lösungsmengen von x − x = 0; x − x = 1; 5x + 2 − 5x = 5.

Gleichungen I

3 Nach x auflösen

$a)\ x - ax = 1\ (a \neq 1)$

$b)\ 2kx - 3 = 4x + 1\ (k \neq 2)$

4 Zahlenrätsel

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen ist um 55 größer als ihre Summe. Wie heißen die Zahlen?

5 Vater und Tochter

Ein Vater ist 43 Jahre alt, seine Tochter 14 Jahre. Nach wie vielen Jahren ist der Vater doppelt so alt wie seine Tochter?

6 Quadrate verändern

a) Verlängert man jede Seite eines Quadrats um 6 cm, verdreifacht sich sein Umfang. Wie lang war eine Seite ursprünglich?
b) Gibt es ein Quadrat, dessen Flächeninhalt sich verdreifacht, wenn jede Seite um 1 m verlängert wird? Bestimme gegebenenfalls die ursprüngliche Seitenlänge.

7 Einholen bei einer Radtour

Tanja fährt mit 16 km/h los. Eine halbe Stunde später startet Claudia am selben Ort und fährt auf derselben Strecke mit 36 km/h hinterher. Beide halten ihre Geschwindigkeit konstant. Nach welcher Fahrzeit holt Claudia Tanja ein?

8 Nullstellen

$f(x) = 2x^2 - 11x - 6$

Bestimme die Nullstellen.

Gleichungen I

1a Rechenweg

Zusammenfassen: $10t - 3 = 17 \Rightarrow t = 2$.

Lösungsmenge: $\{2\}$

1b Rechenweg

Zusammenfassen: $-7{,}2x + 4{,}8 = 9{,}6 - 8{,}4x \Rightarrow 1{,}2x = 4{,}8 \Rightarrow x = 4$.

Lösungsmenge: $\{4\}$

1c Rechenweg

Klammern auflösen: $15y + 43 = 9y + 67 \Rightarrow 6y = 24 \Rightarrow y = 4$.

Lösungsmenge: $\{4\}$

1d Rechenweg

$x \neq 2$. Mit $2(x - 2)$ multiplizieren: $1 + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 5$.

Lösungsmenge: $\{5\}$

1e Rechenweg

$x \neq 2$ und $x \neq -1$. Kreuzweise multiplizieren: $3x(2x + 2) = (3x + 6)(2x - 4) \Rightarrow 6x = -24 \Rightarrow x = -4$.

Lösungsmenge: $\{-4\}$

1f Rechenweg

$x^2 - 9 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow 10x = 34 \Rightarrow x = 17/5 = 3{,}4$.

Lösungsmenge: $\left\{\frac{17}{5}\right\}$

1g Rechenweg

$4t^2 - 36t + 1 = 4t^2 + 12t + 9 \Rightarrow -48t = 8 \Rightarrow t = -1/6$.

Lösungsmenge: $\left\{-\frac{1}{6}\right\}$

1h Rechenweg

$5u^2 = 125 \Rightarrow u^2 = 25 \Rightarrow u = -5$ oder $u = 5$.

Lösungsmenge: $\{-5, 5\}$

1i Rechenweg

$0 = x^2 - 2x = x(x - 2) \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$.

Lösungsmenge: $\{0, 2\}$

1j Rechenweg

$(x + 1)^2(1 + 3x) = 0 \Rightarrow x = -1$ oder $x = -1/3$.

Lösungsmenge: $\left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$

Gleichungen I

1k Rechenweg

$x(x^2 + 8x - 9) = x(x + 9)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -9, 0$ oder 1.

Lösungsmenge: $\{-9, 0, 1\}$

2 Sonderfälle

a) Jede reelle Zahl erfüllt $0 \cdot x = 0$: $L = \mathbb{R}$.
b) $0 \cdot x = 1$ ist unmöglich: $L = \emptyset$.
c) In derselben Reihenfolge: $L = \mathbb{R}$; $L = \emptyset$; $L = \emptyset$.

3 Parameter

$$x = \frac{1}{1 - a}$$

$a \neq 1$ stellt sicher, dass der Nenner nicht 0 ist.

$$x = \frac{2}{k - 2}$$

Für b) folgt aus $(2k - 4)x = 4$ die angegebene Lösung; $k \neq 2$.

4 Zahlenrätsel

$$x(x + 1) = 55 + x + (x + 1)$$

Es folgt $x^2 - x - 56 = (x - 8)(x + 7) = 0$. Die Zahlenpaare sind 8 und 9 sowie −7 und −6.

5 Alter

$$43 + x = 2(14 + x)$$

$x = 15$. In 15 Jahren sind Vater und Tochter 58 bzw. 29 Jahre alt.

6 Quadrate

a) $4(a + 6) = 3 \cdot 4a \Rightarrow a + 6 = 3a \Rightarrow a = 3$ cm.
b) $(a + 1)^2 = 3a^2 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 1 = 0$. Die positive Lösung ist:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Die ursprüngliche Seitenlänge beträgt etwa 1,37 m. Die negative Lösung ist als Seitenlänge ungeeignet.

7 Einholzeit

t ist Claudias Fahrzeit in Stunden. Dann ist Tanja $t + 0{,}5$ Stunden unterwegs.

$$36t = 16\left(t + 0{,}5\right)$$

$20t = 8 \Rightarrow t = 0{,}4$ h = 24 Minuten. Seit Tanjas Start sind dann 54 Minuten vergangen.

8 Nullstellen

$$2x^2 - 11x - 6 = (2x + 1)(x - 6)$$

Die Nullstellen sind $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 6$.