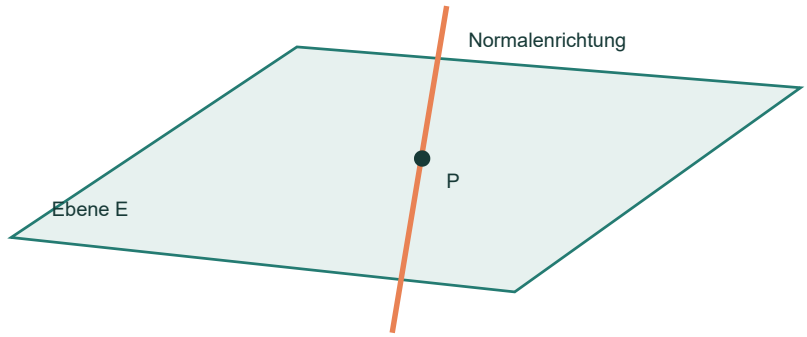
Arbeitsblatt | OBERSTUFE

Analytische Geometrie

Werkzeuge für die Aufgaben

Punkte, Richtungen und Normalen

Gerade: Stützvektor plus Parameter mal Richtungsvektor.
Ebene: Stützvektor plus zwei Parameter mal linear unabhängige Richtungsvektoren.
Eine Koordinatenform $n_1x + n_2y + n_3z = d$ nutzt einen Normalenvektor n. Punktproben, Schnittpunkte und Abstände lassen sich damit gezielt berechnen.



Hilfsskizze

nicht maßstäblich

1 Eine Ebene durch drei Punkte

Gegeben sind A(2 | 1 | 2), B(0 | 1 | 4) und C(4 | 0 | 2).
a) Bestimme eine Parameterform der Ebene E durch A, B und C.
b) Liegt D(12 | −2 | −2) in E?
c) Bestimme die Spurgerade in der xy-Ebene.
d) Berechne den Schnittwinkel von E mit der Geraden durch den Ursprung und A.
e) Bestimme die zu E parallele Ebene durch den Ursprung.
f) Bestimme den Abstand von E zum Ursprung.

2 Geraden, Ebenen und Parallelogramme

a) Bestimme g_1 durch P(2 | 3 | 4) und Q(3 | 3 | 5).
b) Bestimme ihren Spurpunkt in der xy-Ebene.
c) Gibt es einen Spurpunkt in der xz-Ebene?
d) Bestimme E_1 durch A(4 | −2 | 5), B(1 | 0 | 7) und C(4 | 0 | 1).
e) Zeige, dass R(1 | 2 | 3) in E_1 liegt.
f) A, B und C sind drei Ecken eines Parallelogramms, ohne vorgegebene Reihenfolge. Bestimme alle möglichen vierten Ecken.
g) Bestimme die Spurgerade von E_1 in der xz-Ebene.
h) Welchen Abstand hat S(3 | 4 | 4) von E_1?
i) Untersuche die Lage von g_1 zu E_1. Bestimme gegebenenfalls Durchstoßpunkt und Schnittwinkel.
j) Bestimme eine Gerade, die E_1 in T(4 | 1 | −1) rechtwinklig schneidet.

Analytische Geometrie

3 Parameter in Vektoren

Gegeben sind die Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} t \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Für welches t sind a und b linear abhängig?
b) Berechne für t = 1 den Vektor c = 4a − b.
c) Bestimme für t = 1 die Ebene E mit Stützvektor a und Richtungsvektoren b und c in Parameter-, Normalen- und Koordinatenform.
d) Die Ortsvektoren a und b für t = 3 bestimmen zwei Punkte. Gib die Gerade g durch diese Punkte an.
e) Untersuche die Lage von g und E.
f) Bestimme eine zu g parallele Gerade durch P(−2 | 1 | 3).
g) Welchen Abstand hat E vom Ursprung?

4 Lineare Abhängigkeit und Ebenen

$$a = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3k \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Für welche k sind a, b und c linear abhängig?
b) Für k = 3 spannen a und b die Ebene E_1 durch D(1 | −2 | −2) auf. Bestimme E_1.
c) Bestimme eine Gerade, die E_1 rechtwinklig in D schneidet.
d) Für k = 2 bilden a und b Richtungsvektoren einer Ebene E_2 mit Stützvektor c. Gib E_2 an.
e) Bestimme die Schnittgerade von E_1 und E_2.
f) Bestimme den Schnittwinkel der Ebenen.

Analytische Geometrie

5 Zwei Ebenen und eine Geradenschar

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ k+6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige: Die Ebenen sind parallel, aber nicht identisch.
b) Bestimme die Hesseschen Normalformen und die Abstände vom Ursprung.
c) Bestimme den Abstand der Ebenen. Erkläre den Zusammenhang mit ihren Ursprungsabständen und grenze den Fall nicht paralleler Ebenen ab.
d) Bestimme die Spurgerade von E_1 in der xy-Ebene und ihren Abstand vom Ursprung.
e) Bestimme eine zu E_2 orthogonale Gerade durch P(−1 | 0 | 9).
f) Bestimme alle k, für die g_1 und g_k sich schneiden. Berechne Schnittpunkt und Schnittwinkel.

6 Eine Ebenenschar

$$E_r: x + y - rz = 2 - r\,(r \in \mathbb{R})$$

a) Bestimme die gemeinsame Schnittgerade g aller Ebenen. Kontrolle: (1 | 1 | 1) und (2 | 0 | 1) liegen auf g.
b) In welcher Ebene der Schar liegt h?

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Bestimme den Abstand von h und g.
d) Welche Beziehung zwischen r und s macht E_r und E_s orthogonal? Welche Scharebene ist zu keiner anderen Scharebene orthogonal?
e) Bestimme eine weitere Ebene durch g, die nicht zur Schar gehört.
f) Eine Ebene F enthält alle Geraden h_r:

$$h_r: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ r+1 \\ 2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme F.
g) Für welches r hat h_r den kleinsten Abstand zum Ursprung?

7 Kugel und Tangentialebenen

Die Kugel K_a hat den Mittelpunkt M(1 | −2 | 2) und den Radius a > 0.
a) Für welches a liegt der Ursprung auf der Kugel?
b) Bestimme die Tangentialebene E_1 an K_3 im Ursprung.
c) Bestimme die zweite zu E_1 parallele Tangentialebene E_2 an K_3 und ihren Berührpunkt.
d) Die xy-Ebene schneidet K_3 in einem Kreis. Bestimme Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

Analytische Geometrie

8 Kugelschnitte und Spiegelung

Die Kugel K hat den Mittelpunkt M(4 | −4 | 3) und enthält P(1 | −4 | 7). Gegeben ist die Ebenenschar:

$$E_t: 2x - y + 2z = 3t \; (t \in \mathbb{R})$$

a) Bestimme die Kugelgleichung und die Tangentialebene in P.
b) Für welche t ist der Schnitt ein Berührpunkt, ein Kreis oder leer?
c) Bestimme Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises von E_3 und K.
d) Spiegle K an E_3 und bestimme die Gleichung der Spiegelkugel.

Analytische Geometrie

1a/b Ebene und Punktprobe

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 2y + z = 6$$

b) Die linke Seite ergibt für D den Wert 6; die rechte Seite ist 6. D liegt in der Ebene.

1c–f Spur, Winkel und Abstand

c) In der xy-Ebene gilt z = 0:

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Der Richtungsvektor der Ursprungsgeraden ist (2 | 1 | 2). Mit sin(α) = |n · u|/(|n| · |u|) ergibt sich α ≈ 54,74°.
e) Die parallele Ebene durch den Ursprung hat dieselbe linke Seite, aber rechte Seite 0:

$$x + 2y + z = 0$$

f) Der Abstand zum Ursprung ist:

$$\sqrt{6}$$

2a–e Gerade und Ebene

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) z = 4 + t = 0 ⇒ t = −4. Spurpunkt (−2 | 3 | 0).
c) Die y-Koordinate bleibt 3. Daher gibt es keinen Schnitt mit y = 0, also keinen Spurpunkt in der xz-Ebene.
d) Eine mögliche Ebenengleichung:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2x + 2y + z = 9$$

e) 2 · 1 + 2 · 2 + 3 = 9. R liegt in E_1.

Analytische Geometrie

2f–j Parallelogramm, Spur und Schnitt

f) Ohne festgelegte Reihenfolge gibt es drei mögliche Ergänzungen: A + B − C, A + C − B oder B + C − A. Die Punkte sind (1 | -2 | 11), (7 | -2 | -1), (1 | 2 | 3).
g) Für y = 0 gilt:

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

h) Abstand von S(3 | 4 | 4):

$$3$$

i)

Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform

$$2x + 2y + z = 9$$

ergibt den Geradenparameter -5/3. Schnittpunkt S(1/3 | 3 | 7/3).

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: 45,00°.

j) T erfüllt 2 · 4 + 2 · 1 − 1 = 9. Eine orthogonale Gerade ist:

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3a–c Vektoren und Ebenenformen

a) Aus der zweiten Komponente folgt bei linearer Abhängigkeit b = 2a. Die erste Komponente liefert t = 2; die dritte bestätigt 8 = 2 · 2². Also t = 2.
b) Für t = 1 ist c = 4a − b:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor ist (12 | -7 | 2). Normalenform: n · (x − (1 | 2 | 1)) = 0. Koordinatenform:

$$12x - 7y + 2z = 0$$

Analytische Geometrie

3d–g Gerade und Ebene

d) Für t = 3 sind die beiden Punkte (1 | 2 | 9) und (3 | 4 | 8). Daher:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e)

Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform

$$12x - 7y + 2z = 0$$

ergibt den Geradenparameter -2. Schnittpunkt S(-3 | -2 | 11).

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: 10,95°.

f) Eine parallele Gerade ist:

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

g) Die Ebene enthält den Ursprung. Ihr Abstand vom Ursprung ist 0.

4a–c Abhängigkeit und erste Ebene

a) Drei Vektoren im Raum sind genau dann linear abhängig, wenn die Determinante der Spaltenmatrix 0 ist:

$$D = 6\,(k - 3)\,(3k - 7)$$

Die Lösungen sind 7/3, 3.
b) Für k = 3:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$5x - 9y - z = 25$$

c) Nutze den Normalenvektor als Geradenrichtung:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Analytische Geometrie

4d–f Zweite Ebene, Schnittgerade und Winkel

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$24x - 39y - 10z = -6$$

e)

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{256}{51} \\ \frac{343}{17} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 51 \\ 26 \\ 21 \end{pmatrix}$$

f) Der spitze Winkel zwischen den Normalenvektoren ist der Ebenenwinkel: 7,22°.

5a–c Parallele Ebenen

a) Koordinatenformen:

$$3x + 22y + 2z = 17$$

$$3x + 22y + 2z = 38$$

Die Normalenvektoren sind gleich, die rechten Seiten verschieden: echt parallel.

b) Teile jede Koordinatenform durch die Länge des Normalenvektors $\sqrt{497}$. Die normierten rechten Seiten sind:

$$\frac{17\sqrt{497}}{497}$$

$$\frac{38\sqrt{497}}{497}$$

Die Ursprungsabstände sind deren Beträge.

c) Verwende dieselbe Orientierung für beide Einheitsnormalen. Der Ebenenabstand ist der Betrag der Differenz der normierten rechten Seiten:

$$\frac{3\sqrt{497}}{71}$$

Aus bloßen, vorzeichenlosen Ursprungsabständen kommen grundsätzlich Summe oder Differenz infrage; die Lage zum Ursprung entscheidet. Hier liegen beide Ebenen auf derselben Seite des Ursprungs, daher werden die Abstände subtrahiert. Nicht parallele Ebenen schneiden sich und haben den Abstand 0.

Analytische Geometrie

5d–f Spur und Geradenschar

d) Eine Spurgerade ist:

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{22} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 22 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ihr Abstand zum Ursprung ist:

$$\frac{\sqrt{493}}{29}$$

e) Als Richtungsvektor eignet sich der Normalenvektor:

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 2 \end{pmatrix}$$

f) Aus x- und z-Koordinate folgen r = -3 und s = 2. Die y-Koordinate ergibt k = -3. Der Schnittpunkt ist S(2 | -3 | 1). Der spitze Schnittwinkel beträgt 27,02°.

6a–d Ebenenschar

Schreibe x + y − 2 = r(z − 1). Damit ein Punkt in allen Scharebenen liegt, müssen z = 1 und x + y = 2 gelten.
a) Gemeinsame Gerade:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Für h gilt x + y = 2 und z = 2. Einsetzen: 2 − 2r = 2 − r ⇒ r = 0. Also liegt h in E_0: x + y = 2.
c) g und h sind parallel und unterscheiden sich senkrecht zur gemeinsamen Richtung nur in z um 1. Abstand: 1.
d) Normalenvektoren sind (1 | 1 | −r) und (1 | 1 | −s). Orthogonalität bedeutet 2 + rs = 0, also rs = −2. Für r = 0 gibt es kein passendes s. Gesucht ist E_0: x + y = 2.

6e–g Ergänzende Ebene und kleinster Abstand

e) Die Ebene z = 1 enthält g und gehört nicht zur Schar, da der Koeffizient von x bei den Scharebenen immer 1 ist.
f) Alle h_r liegen in F: z = 2. Ihre variablen Stützpunkte und ihre Richtung spannen diese Ebene auf.
g) h_r ist durch z = 2 und x + y = 2 + r beschrieben. Sein Abstand zum Ursprung erfüllt:

$$d^2 = 4 + \frac{(2+r)^2}{2}$$

Das Minimum liegt bei r = −2 und beträgt d = 2. Der nächstgelegene Punkt ist dann (0 | 0 | 2).

7 Kugel und Tangentialebenen

a) a = |OM| = $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}$ = 3.
b) Der Radius zum Berührpunkt steht senkrecht auf der Tangentialebene. E_1: x − 2y + 2z = 0.
c) Der gegenüberliegende Berührpunkt ist B_2 = 2M = (2 | −4 | 4). Die zweite Tangentialebene lautet E_2: x − 2y + 2z = 18.
d) Kreiszentrum M′(1 | −2 | 0). Der Abstand der Kugelmitte zur xy-Ebene beträgt 2; daher:

$$r = \sqrt{5}$$

Der Kreisradius ist $\sqrt{5}$ ≈ 2,24.

Analytische Geometrie

8a/b Kugel und Ebenenschar

a) Der Kugelradius ist |MP| = $\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2}$ = 5. Kugelgleichung:

$$(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 25$$

Tangentialebene in P: (−3 | 0 | 4) · (x − P) = 0, also −3x + 4z = 25.
b) Der Abstand der Mitte von E_t ist |18 − 3t|/3 = |6 − t|.
Berührung bei t = 1 oder t = 11; Schnittkreis für 1 < t < 11; leere Schnittmenge für t < 1 oder t > 11.

8c/d Schnittkreis und Spiegelung

c) Für E_3 gilt 2x − y + 2z = 9. Der Lotfußpunkt ist M* = M − ((18 − 9)/9) · (2 | −1 | 2) = (2 | −3 | 1). Der Abstand zur Mitte ist 3, der Kreisradius $\sqrt{25-9}$ = 4.
d) Spiegelmitte: M′ = M − 2 · (2 | −1 | 2) = (0 | −2 | −1). Der Radius bleibt 5. Spiegelkugel:

$$x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 25$$