Lernblatt | OBERSTUFE

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

1 Geraden im Raum

Zuerst die Richtungen vergleichen

Sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander, sind die Geraden parallel oder identisch. Eine Punktprobe entscheidet, ob sie identisch sind.
Sind die Richtungen nicht parallel, setze die Geradengleichungen gleich. Ein gemeinsames Parameterpaar liefert den Schnittpunkt. Ist das System widersprüchlich, sind die Geraden windschief.

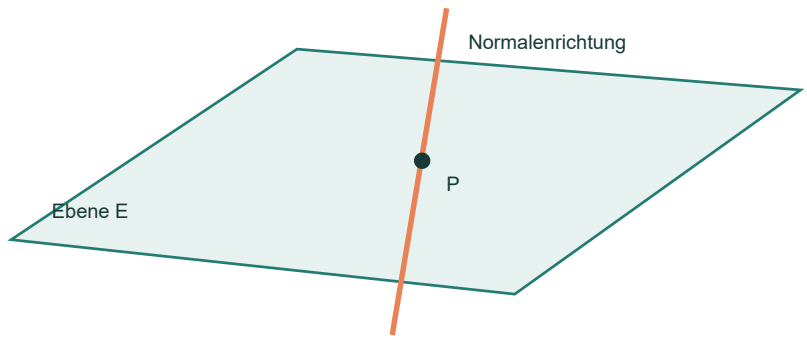
Für eine Punktprobe

Setze den Stützpunkt der einen Geraden in die andere ein. Derselbe Parameter muss alle drei Koordinatengleichungen erfüllen.

2 Gerade und Ebene

Mit dem Normalenvektor entscheiden

Für eine Ebene $n \cdot x = d$ und eine Gerade $x = P + tu$ prüfe $n \cdot u$.
Ist $n \cdot u \neq 0$, gibt es genau einen Schnittpunkt.
Ist $n \cdot u = 0$ und $n \cdot P = d$, liegt die Gerade in der Ebene.
Ist $n \cdot u = 0$ und $n \cdot P \neq d$, ist die Gerade echt parallel zur Ebene.



Hilfsskizze

nicht maßstäblich

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

3 Zwei Ebenen

Normalenvektoren und Gleichungen prüfen

Parallele Normalenvektoren bedeuten parallele oder identische Ebenen. Vergleiche die gesamten Koordinatengleichungen einschließlich der rechten Seiten.
Nicht parallele Normalenvektoren bedeuten, dass sich die Ebenen in einer Geraden schneiden. Deren Richtung ist das Kreuzprodukt der Normalenvektoren; einen Punkt erhältst du durch gemeinsames Lösen der Ebenengleichungen.

Lösungsparameter richtig deuten

Beim Gleichsetzen zweier Parameterformen ist ein freier Parameter für eine Schnittgerade normal. Identische Ebenen haben dagegen zwei unabhängige freie Ortsrichtungen. Eine einzelne allgemeingültige Zeile wie 0 = 0 reicht für sich allein nicht aus, um Identität zu beweisen.

Arbeitsblatt | OBERSTUFE

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

1 Gerade und Gerade

Untersuche für jedes Paar die gegenseitige Lage. Bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a)

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c)

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

2 Gerade und Ebene

Untersuche die Lage und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

3 Ebene und Ebene

Untersuche die Lage und bestimme gegebenenfalls eine Schnittgerade.

a)

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Arbeitsblatt | OBERSTUFE

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

4 Spurpunkte und parallele Gerade

a) Bestimme g durch P(4 | 0 | 2) und Q(3 | 1 | 1). Ermittle ihre Schnittpunkte mit den drei Koordinatenebenen.
b) Bestimme h durch R(2 | 1 | 1), parallel zur folgenden Geraden, und untersuche die Lage von g und h:

$$g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5 Drei Geraden und ein Dreieck

Schließen die drei Geraden ein Dreieck ein? Bestimme gegebenenfalls die Eckpunkte.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6 Weitere Geraden und Ebenen

Untersuche die Lage und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 Spurgeraden

Bestimme die Schnittgeraden mit den drei Koordinatenebenen:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

8 Weitere Ebenenpaare

Untersuche die Lage und bestimme gegebenenfalls eine Schnittgerade.

a)

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

9 Drei Punkte bestimmen eine Ebene

Bestimme E durch A(2 | 2 | 0), B(0 | 5 | 0) und C(0 | 0 | 3). Untersuche anschließend die Lage zur Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

10 Ebene, Punkt und Schnittgerade

Gegeben sind A(6 | 6 | 0), B(0 | 10 | 0), C(0 | 0 | 6) und D(8 | 0 | 4).
a) Bestimme eine Parameterform der Ebene E durch A, B und C.
b) Liegt D in E?
c) Untersuche die Lage von E zur Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Bestimme die Schnittgerade von E mit der Ebene durch A, B und D.

11 Weitere Spurgeraden

Bestimme die Schnittgeraden mit den drei Koordinatenebenen:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

12 Parallele Gerade und aufgespannte Ebene

a) Bestimme g durch $P_1(4 \mid 0 \mid 2)$, parallel zu g_1.
b) Bestimme eine Parameterform der Ebene, die g_1 enthält und durch $P_2(7 \mid 1 \mid -1)$ geht.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13 Trifft eine Gerade ein Parallelogramm?

Das Parallelogramm hat die Ecke $A(-2 \mid -3 \mid -4)$ und die beiden an A anliegenden Kantenvektoren:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Trifft g die Fläche des Parallelogramms? Begründe anhand der Flächenparameter.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

14 Parameter- und Normalenform

Bestimme die Ebene durch $A(2 \mid 2 \mid -6)$, $B(-2 \mid 2 \mid 0)$ und $C(8 \mid 0 \mid 4)$ in Parameter- und Normalenform.

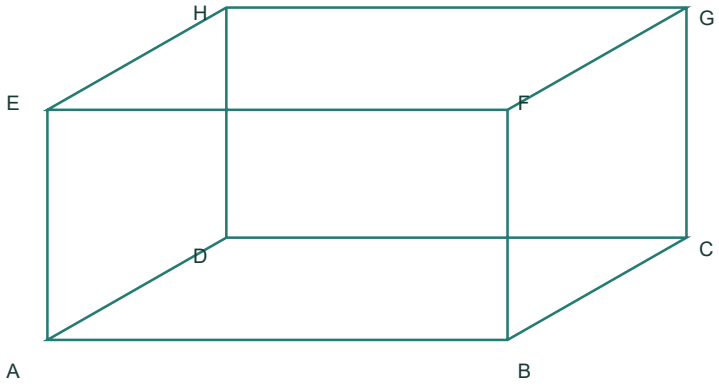
15 Behauptungen überprüfen

Gegeben sind E_1: $x + y + 1 = 0$ und E_2: $x + y - z + 3 = 0$.
a) Prüfe, ob die Ebenen orthogonal sind.
b) Bestimme eine Parameterform ihrer Schnittgeraden.
c) Prüfe, ob $P(-2 \mid 0 \mid 1)$ auf dieser Schnittgeraden liegt.

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

16 Rechteck und Quader

Gegeben sind A(1 | 1 | 1), B(3 | 1 | 1), C(3 | 2 | 1), D(1 | 2 | 1) und E(1 | 1 | 3).
a) Beweise, dass ABCD ein Rechteck ist.
b) Ergänze F, G und H zu einem Quader mit E über A, F über B, G über C und H über D.
c) Zeige, dass die Geraden AD und EB windschief sind.
d) Bestimme Schnittgerade und Schnittwinkel der Ebenen durch A, C, D und durch B, D, E.



Hilfsskizze

17 Parallele Ebenen und Geradenschar

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ k+6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige: Die Ebenen sind parallel, aber nicht identisch.
b) Bestimme die Hesseschen Normalformen und die Abstände vom Ursprung.
c) Bestimme den Abstand der Ebenen. Erkläre den Zusammenhang mit ihren Ursprungsabständen und grenze den Fall nicht paralleler Ebenen ab.
d) Bestimme die Spurgerade von E_1 in der xy-Ebene und ihren Abstand vom Ursprung.
e) Bestimme eine zu E_2 orthogonale Gerade durch P(−1 | 0 | 9).
f) Bestimme alle k, für die g_1 und g_k sich schneiden. Berechne Schnittpunkt und Schnittwinkel.

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

18 Punktabstand und Schnitt

Gegeben sind A(2 | −3 | 2), B(−1 | 3 | 6), C(5 | −5 | 0), D(1 | −4 | 3) und:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme E_1 durch A, B, C.
b) Bestimme den Abstand von D zu E_1.
c) Bestimme den Schnittpunkt von g und E_1.
d) Bestimme eine Parameterform der Ebene E_2, die g enthält und durch D geht.

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

1a Geradenlage

Die Geraden sind windschief.

1b Geradenlage

Die Geraden sind parallel.

1c Geradenlage

Gleichsetzen ergibt die Parameter (1, 1). Schnittpunkt S(1 | 1 | 1).

1d Geradenlage

Die Geraden sind identisch.

2a Gerade und Ebene

$$x + 3y - 2z = 6$$

Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform

$$x + 3y - 2z = 6$$

ergibt den Geradenparameter -4. Schnittpunkt S(3 | 1 | 0).

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: 53,30°.

2b Gerade und Ebene

$$2x - 3y + z = 3$$

Die Gerade ist echt parallel zur Ebene: Der Richtungsvektor ist orthogonal zum Normalenvektor; der Stützpunkt liegt nicht in der Ebene.

3a Ebenenlage

$$x - 2y + z = 3$$

$$x - 2y + z = 1$$

Die Ebenen sind parallel.

3b Ebenenlage

$$4x + y - 6z = -7$$

$$x - 5y + z = -17$$

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{109}{29} \\ \frac{52}{29} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 29 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

3c Ebenenlage

$2x - y - z = -4$

$2x - y - z = -4$

Die Ebenen sind identisch.

4 Spurpunkte und Lage

a) Eine Gerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

xy-Ebene: t = 2; Spurpunkt (2 | 2 | 0).

xz-Ebene: t = 0; Spurpunkt (4 | 0 | 2).

yz-Ebene: t = 4; Spurpunkt (0 | 4 | -2).

b) Eine parallele Gerade zur angegebenen g_0 ist:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Geraden sind windschief.

5 Dreieck?

g1 und g2: Schnittpunkt; S(3 | -3 | 2).

g1 und g3: Schnittpunkt; S(5 | -2 | -1).

g2 und g3: Schnittpunkt; S(2 | 1 | -1).

Die Geraden schließen ein Dreieck ein; die drei genannten Schnittpunkte sind seine Ecken.

6a Gerade und Ebene

$15x - 10y + 4z = 11$

Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform

$15x - 10y + 4z = 11$

ergibt den Geradenparameter 1/7. Schnittpunkt S(9/7 | 11/7 | 13/7).

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: 5,81°.

6b Gerade und Ebene

$7x + 2y - 3z = 4$

Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform

$7x + 2y - 3z = 4$

ergibt den Geradenparameter -5/2. Schnittpunkt S(-3/2 | -5/2 | -13/2).

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: 26,10°.

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

7 Spurgeraden

$3x + 4y - 4z = -13$

xy-Ebene:

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{13}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

xz-Ebene:

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

yz-Ebene:

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8a Ebenenlage

$4x - 4y - z = -10$

$x - 2y + z = -3$

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

8b Ebenenlage

$3x + 5y + 4z = 10$

$9x - 5y + 8z = 11$

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

9 Ebene durch drei Punkte

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$9x + 6y + 10z = 30$$

Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform

$$9x + 6y + 10z = 30$$

ergibt den Geradenparameter 82/99. Schnittpunkt S(182/33 | -574/99 | 50/33).

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: 55,19°.

10 Punktprobe und Schnittgerade

a) Eine Parameterform ist:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$2x + 3y + 5z = 30$$

b) D liefert 36 statt 30, liegt also nicht in E.
c)

Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform

$$2x + 3y + 5z = 30$$

ergibt den Geradenparameter 23/3. Schnittpunkt S(1 | 23/3 | 1).

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: 29,12°.

d) Beide Ebenen enthalten A und B; D liegt nicht in E. Die Schnittgerade ist daher die Gerade AB:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

11 Spurgeraden

$$3x + 6y + z = 3$$

xy-Ebene:

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

xz-Ebene:

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

yz-Ebene:

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

12 Gerade und Ebene

a) Nutze denselben Richtungsvektor:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Als zweite Richtung dient $P_2 - (3 \mid 1 \mid 2) = (4 \mid 0 \mid -3)$:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$12x - 7y + 16z = 61$$

13 Flächenparameter prüfen

Setze A + r · a + s · d gleich der Geraden. Es ergeben sich r = 1/2, s = 3/2 und t = -1. Der Schnitt mit der Trägerebene ist (1 | 6 | 3).
Ein Punkt gehört genau dann zum Parallelogramm, wenn $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq s \leq 1$. Diese Bedingung ist nicht erfüllt; g trifft die Fläche nicht.

14 Ebenenformen

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor ist (3 | 19 | 2). Die Normalenform lautet n · (x − A) = 0. Daraus folgt:

$$3x + 19y + 2z = 32$$

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

15 Die Behauptungen stimmen nicht

a) Die Normalenvektoren sind (1 | 1 | 0) und (1 | 1 | −1). Ihr Skalarprodukt ist 2, also nicht 0. Die Ebenen sind nicht orthogonal.
b) Subtrahieren liefert z = 2; außerdem x + y = −1. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) P(−2 | 0 | 1) erfüllt weder x + y = −1 noch z = 2 und liegt daher nicht auf der Schnittgeraden.

16 Rechteck und Quader

a) AB = (2 | 0 | 0), AD = (0 | 1 | 0). Das Skalarprodukt ist 0; zudem sind AB und DC sowie AD und BC jeweils gleich. ABCD ist ein Rechteck.
b) Mit dem Höhenvektor E − A = (0 | 0 | 2) ergeben sich F(3 | 1 | 3), G(3 | 2 | 3), H(1 | 2 | 3).
c) AD und EB sind nicht parallel. Beim Gleichsetzen erzwingen x und y die Parameter 0; die z-Koordinaten widersprechen sich. Die Geraden sind windschief.
d) Die Ebenengleichungen sind:

$$z = 1$$

$$x + 2y + z = 6$$

Die Ebenen schneiden sich. Eine Schnittgerade ist:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel: 65,91°.

17a–c Parallele Ebenen

a) Koordinatenformen:

$$3x + 22y + 2z = 17$$

$$3x + 22y + 2z = 38$$

Die Normalenvektoren sind gleich, die rechten Seiten verschieden: echt parallel.

b) Teile jede Koordinatenform durch die Länge des Normalenvektors $\sqrt{497}$. Die normierten rechten Seiten sind:

$$\frac{17\sqrt{497}}{497}$$

$$\frac{38\sqrt{497}}{497}$$

Die Ursprungsabstände sind deren Beträge.

c) Verwende dieselbe Orientierung für beide Einheitsnormalen. Der Ebenenabstand ist der Betrag der Differenz der normierten rechten Seiten:

$$\frac{3\sqrt{497}}{71}$$

Aus bloßen, vorzeichenlosen Ursprungsabständen kommen grundsätzlich Summe oder Differenz infrage; die Lage zum Ursprung entscheidet. Hier liegen beide Ebenen auf derselben Seite des Ursprungs, daher werden die Abstände subtrahiert. Nicht parallele Ebenen schneiden sich und haben den Abstand 0.

Lagebeziehungen: Geraden und Ebenen

17d–f Spur und Geradenschar

d) Eine Spurgerade ist:

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{22} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 22 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ihr Abstand zum Ursprung ist:

$$\frac{\sqrt{493}}{29}$$

e) Als Richtungsvektor eignet sich der Normalenvektor:

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 2 \end{pmatrix}$$

f) Aus x- und z-Koordinate folgen r = -3 und s = 2. Die y-Koordinate ergibt k = -3. Der Schnittpunkt ist S(2 | -3 | 1). Der spitze Schnittwinkel beträgt 27,02°.

18 Abstand und Schnitt

a) Eine Parameterform lautet:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2x - 3y + 6z = 25$$

b) Der Punktabstand ist:

$$1$$

c)

Einsetzen der Geraden in die Koordinatenform

$$2x - 3y + 6z = 25$$

ergibt den Geradenparameter 1. Schnittpunkt S(2 | -3 | 2).

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: 23,45°.

d) Nutze den Geradenstützpunkt, die Geradenrichtung und den Vektor von diesem Stützpunkt zu D:

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$10x - y + 9z = 41$$