

Extremwertaufgaben

Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Mathematik · Qualifikationsphase (Q1)

Leitfaden · 22 Aufgaben · ausführliche Musterlösungen

Teil 1 · Ein bewährtes 5-Schritte-Schema

- 1. Skizze und Variablen:** Zeichnen Sie eine Planfigur. Legen Sie die veränderlichen Größen und ihre Einheiten fest.
- 2. Hauptbedingung:** Formulieren Sie die zu maximierende oder minimierende Zielgröße, etwa $A(x,y) = xy$ oder $V(r,h) = \pi r^2 h$.
- 3. Nebenbedingung:** Erfassen Sie die Einschränkungen, zum Beispiel eine feste Zaunlänge, eine vorgegebene Oberfläche oder eine Kurvengleichung. Lösen Sie die Bedingung nach einer Variablen auf.
- 4. Zielfunktion und Sachbereich:** Setzen Sie die Nebenbedingung in die Hauptbedingung ein. Bestimmen Sie, für welche Werte die reale Figur oder Situation sinnvoll ist.
- 5. Optimieren und global absichern:** Für differenzierbare Funktionen liegen innere Extremstellen unter den Lösungen von $F'(x) = 0$. Prüfen Sie die Kandidaten und das Randverhalten. Formulieren Sie die Antwort mit Einheiten.

Lokales Extremum oder globales Optimum?

- Lokaler Nachweis:** Gilt $F'(x_0) = 0$ und $F''(x_0) < 0$, liegt ein lokales Maximum vor. Bei $F''(x_0) > 0$ liegt ein lokales Minimum vor. Ist $F''(x_0) = 0$, liefert dieses Kriterium keine Entscheidung.
- Vorzeichenwechsel:** Wechselt F' von + nach -, liegt ein lokales Maximum vor; von - nach + ein lokales Minimum.
- Globaler Nachweis:** Vergleichen Sie bei stetigen Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall alle inneren Kandidaten und Randwerte. Alternativ können ein geeigneter Monotonienachweis oder strenge Konvexität bzw. Konkavität das globale Optimum sichern.

Das Schema ist eine didaktische Arbeitshilfe und keine vorgeschriebene Schrittfolge des Kernlehrplans.

Extremwertaufgaben

Sachbereiche, Randfälle und Arbeitsaufträge

Reale Figuren und entartete Randfälle

Ein echtes Rechteck, eine Schachtel oder ein Trapez verlangt positive Seitenlängen und gegebenenfalls positive Höhe. Deshalb ist der geometrische Sachbereich häufig offen, zum Beispiel $0 < x < 5$.

Eine stetige Erweiterung auf $[0;5]$ erleichtert den Randvergleich. Die Randpunkte beschreiben dann entartete Figuren; sie sind keine tatsächlich nutzbaren Schachteln.

Bei offenen oder unbeschränkten Intervallen betrachten Sie Grenzwerte. Ein offenes Intervall ist keine Definitionslücke. Ein größter Grenzwert muss nicht als Maximum angenommen werden: Das Drahtproblem zeigt den Unterschied zwischen Maximum und Supremum.

Typische Fehler vermeiden

Stationäre Stelle: Aus $F'(x_0) = 0$ allein folgt noch kein Extremum.

Brüche ableiten: $\frac{c}{x} = c x^{-1}$ kann mit der Potenzregel abgeleitet werden; die Quotientenregel ist ebenfalls zulässig. In beiden Fällen gilt $F'(x) = -\frac{c}{x^2}$.

Runden: Rechnen Sie mit exakten oder ungerundeten Zwischenwerten weiter. Runden Sie erst das Endergebnis.

Einheiten: Längen in LE, Flächen in FE, wenn keine Maßeinheit vorgegeben ist. Bei Sachaufgaben die angegebenen Einheiten beachten; Oberfläche ist eine Fläche.

Operatoren: Was ist zu dokumentieren?

Bestimmen / ermitteln: Das Vorgehen kann ohne einschränkenden Zusatz frei gewählt werden, zum Beispiel rechnerisch oder grafisch. Es ist nachvollziehbar darzustellen.

Berechnen: Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen. Zugelassene Hilfsmittel und einschränkende Zusätze sind zu beachten.

Begründen / nachweisen / zeigen: Bestätigen Sie die Aussage durch logisches Schließen. Eine feste Abfolge von Ableitungskriterien ist nicht für jede Aussage erforderlich.

Interpretieren: Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Ergebnis und Sachsituation her.

Orientierung: NRW, Mathematik, Operatorenübersicht gültig ab dem Abitur 2023. Die konkrete Aufgabenstellung und die zugelassenen Hilfsmittel sind maßgeblich. Die Sammlung ist kein offizielles Prüfungsmaterial.

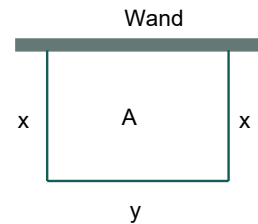
Extremwertaufgaben

Teil 2 · A · Rechteck- und Zaungeometrie

Alle Skizzen sind schematisch. Begründen Sie bei jeder Optimierung, warum das gefundene Extremum im gesamten Sachbereich optimal ist.

Aufgabe 1 · Weideland an der Stallwand

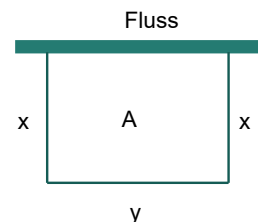
Ein Landwirt besitzt 40 m Zaun. An einer geraden Scheunenwand soll ein rechteckiges Gehege mit maximaler Fläche entstehen. Die Wand benötigt keinen Zaun. x ist die Tiefe, y die Seite parallel zur Wand.



- Stellen Sie Hauptbedingung, Nebenbedingung und Zielfunktion $A(x)$ auf. Geben Sie den Sachbereich an.
- Berechnen Sie die optimalen Abmessungen und den maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe 2 · Liegewiese am Flusсуfer

An einem geraden Flusсуfer soll eine rechteckige Liegewiese entstehen. Die Flusseite bleibt offen; für die drei anderen Seiten stehen 120 m Zaun bereit. x ist die Tiefe, y die Seite parallel zum Ufer.

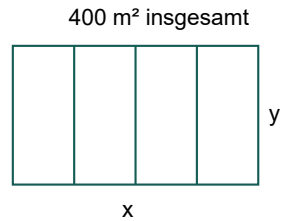


- Bestimmen Sie die Zielfunktion $A(x)$ und den Sachbereich.
- Berechnen Sie die optimalen Maße. Vergleichen Sie die Fläche mit einer quadratischen Wiese bei gleicher Zaunlänge.

Extremwertaufgaben

Aufgabe 3 · Das Vier-Kammern-Gehege

Ein rechteckiges Gehege mit insgesamt 400 m^2 Fläche wird durch drei Zwischenzäune in vier gleich große Abteile unterteilt. Die Zwischenzäune sind parallel zur Seite y ; x bezeichnet die gesamte Länge.



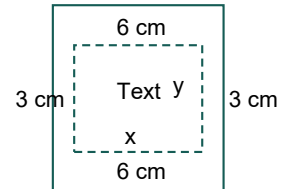
- Stellen Sie die gesamte Zaunlänge $L(x)$ mit Sachbereich auf.
- Berechnen Sie die Außenmaße für die minimale Zaunlänge.

Extremwertaufgaben

Teil 2 · A · Papierverbrauch und Kanalgeometrie

Aufgabe 4 · Plakat mit festen Randstreifen

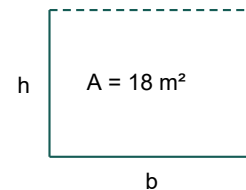
Ein Plakat erhält eine Textfläche von 1800 cm^2 . Oben und unten bleiben jeweils 6 cm, links und rechts jeweils 3 cm unbedruckt. x und y bezeichnen Breite und Höhe der Textfläche.



- Leiten Sie die Zielfunktion $A(x)$ für die gesamte Papierfläche her. Geben Sie den Sachbereich an.
- Berechnen Sie die Außenmaße für den minimalen Papierverbrauch.

Aufgabe 5 · Betonkanal mit U-förmigem Querschnitt

Ein oben offener, rechteckiger Betonkanal besitzt einen lichten Querschnitt von 18 m^2 . Sohlenbreite und Wassertiefe heißen b und h . Der benetzte Umfang $U = b + 2h$ soll minimal sein.



Modellannahmen: konstante Wandstärke und gleiche Materialkosten je Volumen. Bei gleicher Kanallänge ist der Materialbedarf näherungsweise proportional zu U . Für den hydraulischen Vergleich werden gleiche Rauheit und gleiches Gefälle angenommen.

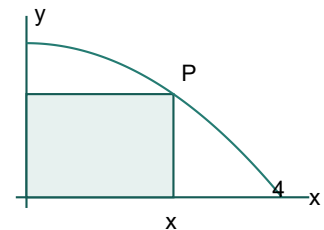
- Leiten Sie $U(h)$ mit Sachbereich her.
- Berechnen Sie die optimale Tiefe und Sohlenbreite.

Extremwertaufgaben

Teil 2 · B · Rechtecke und Funktionsgraphen

Aufgabe 6 · Rechteck unter einer Parabel

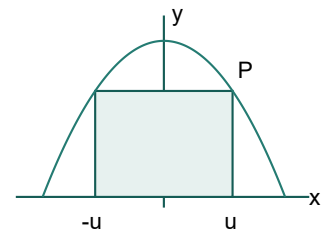
Unter $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ liegt ein achsenparalleles Rechteck im ersten Quadranten. Ein Eckpunkt ist $O(0 | 0)$, der gegenüberliegende Punkt $P(x | f(x))$ liegt auf dem Graphen.



- Stellen Sie die Flächenfunktion $A(x)$ und den Sachbereich auf.
- Berechnen Sie die Koordinaten von P für den maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe 7 · Symmetrisches Rechteck unter einer Parabel

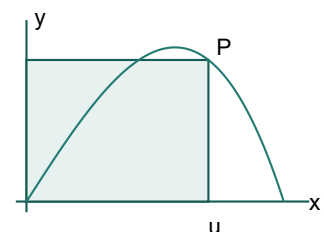
Unter $f(x) = 9 - x^2$ wird ein Rechteck einbeschrieben. Die Grundseite liegt auf der x-Achse; die oberen Eckpunkte liegen bei $x = -u$ und $x = u$ auf der Parabel.



- Zeigen Sie: $A(u) = 18u - 2u^3$ für $0 < u < 3$. Erläutern Sie die Erweiterung auf $[0; 3]$.
- Bestimmen Sie u für den maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe 8 · Rechteck mit Eckpunkt auf einer kubischen Kurve

Ein Rechteck hat einen Eckpunkt im Ursprung und zwei Seiten auf den positiven Koordinatenachsen. Der gegenüberliegende Punkt $P(u | f(u))$ liegt auf $f(x) = -x^3 + 12x$ mit $0 < u < \sqrt{12}$.



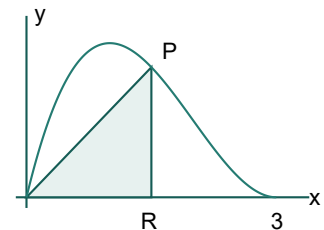
- Stellen Sie die Flächenfunktion $A(u)$ auf.
- Berechnen Sie die Koordinaten von P für den maximalen Flächeninhalt.

Extremwertaufgaben

Teil 2 · B · Dreieck, Abstand und Trapez

Aufgabe 9 · Rechtwinkliges Dreieck unter einer kubischen Kurve

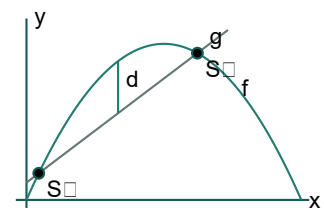
$P(u \mid v)$ liegt mit $0 < u < 3$ auf $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Mit $O(0 \mid 0)$ und $R(u \mid 0)$ bildet der Punkt ein rechtwinkliges Dreieck OPR .



- Stellen Sie die Flächenfunktion $A(u)$ auf.
- Berechnen Sie die Stelle u für den maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe 10 · Maximaler vertikaler Abstand zweier Graphen

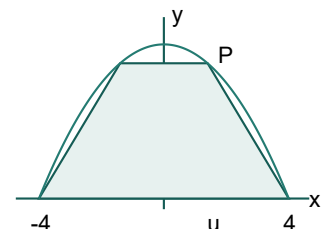
Gegeben sind $f(x) = -x^2 + 6x$ und $g(x) = 2x + 1$. Zwischen den beiden Schnittstellen wird eine Verbindungsstrecke parallel zur y-Achse eingezeichnet.



- Berechnen Sie die Schnittstellen und das relevante Intervall.
- Berechnen Sie die Stelle des maximalen Abstands und dessen Länge.

Aufgabe 11 · Symmetrisches Trapez unter einer Parabel

Unter $f(x) = 16 - x^2$ liegt ein symmetrisches Trapez. Die untere Grundseite verbindet die Nullstellen auf der x-Achse. Die obere Seite hat die Eckpunkte $P(u \mid f(u))$ und $Q(-u \mid f(u))$, $0 < u < 4$.



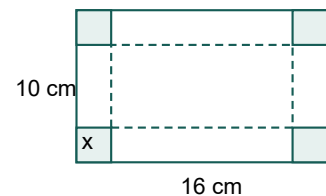
- Leiten Sie $A(u) = -u^3 - 4u^2 + 16u + 64$ her.
- Berechnen Sie u für den maximalen Flächeninhalt. Berücksichtigen Sie das Verhalten an den Grenzen des Sachbereichs.

Extremwertaufgaben

Teil 2 · C · Schachteln und Verpackungsdesign

Aufgabe 12 · Faltschachtel aus 16 cm × 10 cm Karton

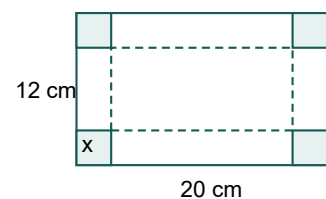
Aus einem Kartonbogen der Maße 16 cm × 10 cm werden vier kongruente Eckquadrate der Seitenlänge x herausgeschnitten. Durch Hochfalten entsteht eine oben offene Schachtel.



- Begründen Sie den Sachbereich $0 < x < 5$ und die Erweiterung auf $[0; 5]$ zur Randuntersuchung. Leiten Sie $V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ her.
- Berechnen Sie das optimale Schnittmaß und das maximale Volumen.

Aufgabe 13 · Faltschachtel aus 20 cm × 12 cm Karton

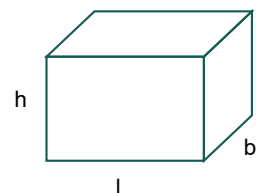
Aus einem Pappbogen der Maße 20 cm × 12 cm entsteht durch Ausschneiden von Eckquadraten der Seitenlänge x eine oben offene Schachtel.



- Stellen Sie $V(x)$ mit Sachbereich auf.
- Berechnen Sie das Schnittmaß für das maximale Volumen auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 14 · Geschlossene Schachtel mit Längenverhältnis

Eine geschlossene Schachtel hat eine rechteckige Grundfläche. Die Länge beträgt das Dreifache der Breite: $l = 3b$. Bei einer Oberfläche von 288 cm^2 soll das Volumen maximal sein.



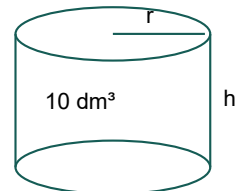
- Zeigen Sie $h = \frac{144 - 3b^2}{4b}$. Stellen Sie $V(b)$ mit Sachbereich auf.
- Berechnen Sie b , l , h und das maximale Volumen.

Extremwertaufgaben

Teil 2 · C · Zylinder und Geschenkkarton

Aufgabe 15 · Zylindrischer Eimer ohne Deckel: 10 Liter

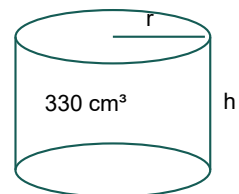
Ein zylindrischer Eimer ohne Deckel fasst 10 Liter, also 10 dm^3 . Die Oberfläche aus Boden und Mantel soll minimal sein. Alle Längen werden in dm angegeben.



- Leiten Sie $O(r) = \pi r^2 + \frac{20}{r}$ her. $O(r)$ wird in dm^2 angegeben.
- Berechnen Sie Radius und Höhe. Zeigen Sie, dass im Optimum $h = r$ gilt.

Aufgabe 16 · Geschlossene Getränkedose: 330 ml

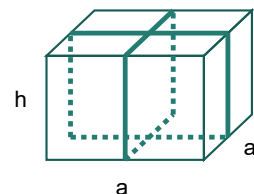
Eine zylindrische Dose mit Boden und Deckel besitzt ein Volumen von 330 cm^3 . Der Blechverbrauch wird durch ihre Oberfläche modelliert.



- Stellen Sie die Oberflächenfunktion $O(r)$ auf.
- Berechnen Sie den optimalen Radius und die Höhe.
- Beweisen Sie für beliebiges festes Volumen $V > 0$: Beim materialoptimalen geschlossenen Zylinder gilt $h = 2r$.

Aufgabe 17 · Geschenkkarton mit zwei gekreuzten Bandschlaufen

Ein Karton hat eine quadratische Grundfläche mit Seitenlänge a und Höhe h . Zwei senkrechte Bandschlaufen verlaufen rechtwinklig zueinander über Deckel und Boden. Jede Schlaufe ist $2a + 2h$ lang. Ohne Schleife stehen 120 cm Band zur Verfügung.



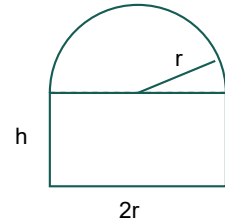
- Stellen Sie $V(a)$ mit Sachbereich auf.
- Berechnen Sie a und h für das maximale Volumen.

Extremwertaufgaben

Teil 2 · D · Rundbogenfenster und Randextrema

Aufgabe 18 · Rundbogenfenster

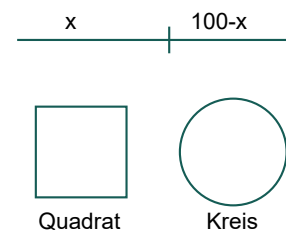
Ein Fenster besteht aus einem Rechteck mit Breite $2r$ und Höhe h sowie einem aufgesetzten Halbkreis mit Radius r . Der äußere Rahmen ist insgesamt 6 m lang; eine innere Querstrebe zählt nicht mit.



- Stellen Sie die Umfangsbedingung auf.
- Leiten Sie die Flächenfunktion $A(r)$ mit Sachbereich her.
- Berechnen Sie r und h für die maximale Fensterfläche. Bei gleicher Lichtdurchlässigkeit entspricht dies dem maximalen Lichteinfall.

Aufgabe 19 · Draht für Quadrat und Kreis

Von einem 100 cm langen Draht werden x cm für ein Quadrat und $100 - x$ cm für einen Kreis verwendet. Für den Randvergleich sind $x = 0$ und $x = 100$ ausdrücklich erlaubt: Dann entsteht nur eine der beiden Figuren.



- Stellen Sie die Gesamtflächenfunktion $A(x)$ für $x \in [0;100]$ auf.
- Berechnen Sie die Aufteilung für die minimale Gesamtfläche.
- Bestimmen Sie durch Randvergleich die maximale Fläche. Erläutern Sie, was sich ändert, wenn beide Teilstücke positive Länge haben müssen.

Extremwertaufgaben

Teil 2 · D · Kosten, Gewinn und Stadionoval

Aufgabe 20 · Kostenoptimierte Lagerhalle

Eine rechteckige Lagerhalle mit Höhe $h = 5$ m soll 6000 m^3 fassen. Fundament und Dach kosten zusammen 300 €/m^2 Grundfläche, die Wände 180 €/m^2 Wandfläche. Die Breite x liegt in $[15;50]$; y bezeichnet die Länge.

- Leiten Sie $K(x) = 360000 + 1800x + \frac{2160000}{x}$ her; $K(x)$ wird in Euro angegeben.
- Berechnen Sie die Abmessungen für die minimalen Baukosten.
- Bestimmen Sie die maximalen Kosten auf dem angegebenen Intervall.

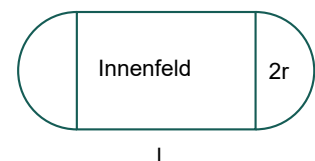
Aufgabe 21 · Gewinnmaximierung bei konstantem Verkaufspreis

Ein Unternehmen hat die Erlösfunktion $E(x) = 30x$ und die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 9x^2 + 45x + 20$. Erlös und Kosten werden in Tsd. Euro, die Menge x in Mengeneinheiten (ME) angegeben. Es gilt $x \in [0;8]$.

- Stellen Sie die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$ auf.
- Berechnen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn.

Aufgabe 22 · Stadionoval: maximale rechteckige Innenfläche

Ein Stadionoval besteht aus einem Rechteck der Länge l und Breite $2r$ sowie zwei Halbkreisen an den Schmalseiten. Der äußere Umfang beträgt 400 m .



- Drücken Sie l durch den Radius r aus und bestimmen Sie den Sachbereich.
- Berechnen Sie r und l für die maximale Fläche des rechteckigen Innenfeldes.

Extremwertaufgaben

Teil 3 · Ausführliche Musterlösungen

Sachbereich = zulässige reale Werte. Bei Randuntersuchungen werden entartete Grenzfälle nur rechnerisch ergänzt. LE = Längeneinheiten, FE = Flächeneinheiten.

Lösung 1 · Weideland an der Stallwand

Modell: $A = xy$, $2x + y = 40$, also $y = 40 - 2x$. Sachbereich: $0 < x < 20$; Erweiterung: $[0; 20]$.

Zielfunktion: $A(x) = 40x - 2x^2$. $A'(x) = 40 - 4x = 0$ ergibt $x_0 = 10$. $A''(x) = -4 < 0$.

Globaler Nachweis: $A(0) = A(20) = 0$. Daher $x = 10$ m, $y = 20$ m und $A_{\max} = 200$ m².

Lösung 2 · Liegewiese am Flussufer

Modell: $A = xy$, $2x + y = 120$. $A(x) = 120x - 2x^2$ für $0 < x < 60$; Randuntersuchung auf $[0; 60]$.

Optimierung: $A'(x) = 120 - 4x = 0$ ergibt $x_0 = 30$; $A'' = -4 < 0$. Die Randflächen sind beide 0.

Ergebnis: $x = 30$ m, $y = 60$ m, $A_{\max} = 1800$ m². Beim Quadrat gilt $3x = 120$: Seitenlänge 40 m, Fläche 1600 m². Das Optimum bietet 200 m² bzw. 12,5 % mehr Fläche.

Lösung 3 · Das Vier-Kammern-Gehege

Modell: $L = 2x + 5y$, $xy = 400$, $y = \frac{400}{x}$. Somit $L(x) = 2x + \frac{2000}{x}$ für $x > 0$.

Optimierung: $L'(x) = 2 - \frac{2000}{x^2} = 0$ ergibt $x_0 = 10\sqrt{10}$. $L''(x) = \frac{4000}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$; das Minimum ist global und eindeutig.

Ergebnis: $x = 10\sqrt{10} \approx 31,62$ m, $y = 4\sqrt{10} \approx 12,65$ m. $L_{\min} = 40\sqrt{10} \approx 126,49$ m. Die vier Abteile haben jeweils 100 m².

Extremwertaufgaben

Teil 3 · Ausführliche Musterlösungen

Lösung 4 · Plakat mit festen Randstreifen

Modell: $A = (x + 6)(y + 12)$, $xy = 1800$, $y = \frac{1800}{x}$. $A(x) = 12x + \frac{10800}{x} + 1872$ für $x > 0$.

Optimierung: $A'(x) = 12 - \frac{10800}{x^2} = 0$ ergibt $x_0 = 30$. $A''(x) = \frac{21600}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$: eindeutiges globales Minimum.

Ergebnis: Textfläche $30 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$; Außenmaße $36 \text{ cm} \times 72 \text{ cm}$. Papierfläche $A_{\min} = 2592 \text{ cm}^2$.

Lösung 5 · Betonkanal mit U-förmigem Querschnitt

Modell: $bh = 18$, $b = \frac{18}{h}$. $U(h) = \frac{18}{h} + 2h$ für $h > 0$.

Optimierung: $U'(h) = -\frac{18}{h^2} + 2 = 0$ ergibt $h_0 = 3$. $U''(h) = \frac{36}{h^3} > 0$ auf dem gesamten Sachbereich: eindeutiges globales Minimum.

Ergebnis: Tiefe $h = 3 \text{ m}$, Sohlenbreite $b = 6 \text{ m}$; $U_{\min} = 12 \text{ m}$. Die Materialaussage gilt im angegebenen vereinfachten Modell.

Lösung 6 · Rechteck unter einer Parabel

Modell: $A(x) = x f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 4x$ für $0 < x < 4$; Randuntersuchung auf $[0; 4]$.

Optimierung: $A'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 4 = 0$ ergibt $x_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$. $A''(x) = -\frac{3}{2}x$, also $A''(x_0) < 0$.

Globaler Nachweis und Ergebnis: $A(0) = A(4) = 0$. $P(\frac{4}{\sqrt{3}} | \frac{8}{3}) \approx P(2,31 | 2,67)$; $A_{\max} = \frac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6,16 \text{ FE}$.

Extremwertaufgaben

Teil 3 · Ausführliche Musterlösungen

Lösung 7 · Symmetrisches Rechteck unter einer Parabel

Modell: Breite $2u$, Höhe $9 - u^2$. $A(u) = 2u(9 - u^2) = 18u - 2u^3$ für $0 < u < 3$. Die Randpunkte der Erweiterung $[0;3]$ beschreiben entartete Rechtecke.

Optimierung: $A'(u) = 18 - 6u^2 = 0$ ergibt $u_0 = \sqrt{3}$. $A''(u) = -12u$, also $A''(u_0) < 0$. $A(0) = A(3) = 0$.

Ergebnis: $u = \sqrt{3} \approx 1,73$; Breite $2\sqrt{3}$ LE, Höhe 6 LE. $A_{\max} = 12\sqrt{3} \approx 20,78$ FE.

Lösung 8 · Rechteck mit Eckpunkt auf einer kubischen Kurve

Modell: $A(u) = u(-u^3 + 12u) = -u^4 + 12u^2$ für $0 < u < \sqrt{12}$. Randuntersuchung auf $[0; \sqrt{12}]$.

Optimierung: $A'(u) = -4u(u^2 - 6) = 0$. Im Sachbereich liegt nur $u_0 = \sqrt{6}$. $A''(u) = -12u^2 + 24$ und $A''(u_0) = -48 < 0$. Die Randflächen sind 0.

Ergebnis: $P(\sqrt{6} \mid 6\sqrt{6}) \approx P(2,45 \mid 14,70)$. $A_{\max} = 36$ FE.

Lösung 9 · Rechtwinkliges Dreieck unter einer kubischen Kurve

Modell: $A(u) = \frac{1}{2}u(u^3 - 6u^2 + 9u) = \frac{1}{2}u^4 - 3u^3 + \frac{9}{2}u^2$ für $0 < u < 3$.

Optimierung: $A'(u) = u(2u^2 - 9u + 9)$. Nullstellen: 0, $\frac{3}{2}$ und 3; nur $\frac{3}{2}$ liegt im Sachbereich.

$A''(u) = 6u^2 - 18u + 9$, $A''(\frac{3}{2}) = -\frac{9}{2} < 0$.

Globaler Nachweis: Die Fläche strebt an beiden offenen Grenzen gegen 0. Daher $u = 1,5$, $v = \frac{27}{8}$

und $A_{\max} = \frac{81}{32} \approx 2,53$ FE.

Extremwertaufgaben

Teil 3 · Ausführliche Musterlösungen

Lösung 10 · Maximaler vertikaler Abstand zweier Graphen

Schnittstellen: $-x^2 + 6x = 2x + 1$ ergibt $x^2 - 4x + 1 = 0$. Also $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $D = [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$.

Abstand: Auf D gilt $f \geq g$. Daher $d(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + 4x - 1$. $d'(x) = -2x + 4 = 0$ ergibt $x_0 = 2$; $d'' = -2 < 0$.

Globaler Nachweis und Ergebnis: An beiden Schnittstellen ist $d = 0$. Der maximale Abstand beträgt $d(2) = 3$ LE bei $x = 2$.

Lösung 11 · Symmetrisches Trapez unter einer Parabel

Modell: Grundseiten 8 und $2u$, Höhe $16 - u^2$. $A(u) = \frac{8 + 2u}{2}(16 - u^2) = -u^3 - 4u^2 + 16u + 64$, $0 < u < 4$.

Optimierung: $A'(u) = -3u^2 - 8u + 16 = 0$ ergibt $u = \frac{4}{3}$ oder $u = -4$. Zulässig ist nur $u_0 = \frac{4}{3}$; $A''(u_0) = -16 < 0$.

Globaler Nachweis: Grenzflächen sind 64 FE bei $u \rightarrow 0$ und 0 FE bei $u \rightarrow 4$. $A(\frac{4}{3}) = \frac{2048}{27} \approx 75,85$ FE ist größer: globales Maximum bei $u = \frac{4}{3} \approx 1,33$.

Lösung 12 · Faltschachtel aus 16 cm × 10 cm Karton

Modell: $V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$. Positive Höhe und Grundseiten verlangen $0 < x < 5$. Auf $[0;5]$ sind die entarteten Randfälle eingeschlossen.

Optimierung: $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0$ ergibt $x = 2$ oder $x = \frac{20}{3}$. Nur 2 ist zulässig.

$V''(2) = 24 \cdot 2 - 104 = -56 < 0$; $V(0) = V(5) = 0$.

Ergebnis: Schnittmaß $x = 2$ cm; Schachtel 12 cm × 6 cm × 2 cm. $V_{\max} = 144$ cm³.

Extremwertaufgaben

Teil 3 · Ausführliche Musterlösungen

Lösung 13 · Faltschachtel aus 20 cm × 12 cm Karton

Modell: $V(x) = x(20 - 2x)(12 - 2x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x$, $0 < x < 6$; Randuntersuchung auf $[0;6]$.

Optimierung: $V'(x) = 12x^2 - 128x + 240 = 0$ ergibt $x_{1,2} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{3}$. Nur $x_0 = \frac{16 - 2\sqrt{19}}{3} \approx 2,4274$ ist zulässig; die andere Lösung liegt über 6. $V''(x_0) = -16\sqrt{19} < 0$.

Globaler Nachweis und Ergebnis: $V(0) = V(6) = 0$. Schnittmaß $x \approx 2,43$ cm, $V_{\max} \approx 262,68$ cm³. Für Folgewerte mit dem ungerundeten Schnittmaß rechnen.

Lösung 14 · Geschlossene Schachtel mit Längenverhältnis

Modell: $V = 3b^2h$. $O = 2(3b^2 + 4bh) = 288$ ergibt $h = \frac{144 - 3b^2}{4b}$. $h > 0$ und $b > 0$ verlangen $0 < b < \sqrt{48}$.

Zielfunktion: $V(b) = 108b - \frac{9}{4}b^3$. $V'(b) = 108 - \frac{27}{4}b^2 = 0$ ergibt $b_0 = 4$. $V''(4) = -54 < 0$.

Globaler Nachweis und Ergebnis: $V(b)$ strebt an beiden Grenzen gegen 0. $b = 4$ cm, $l = 12$ cm, $h = 6$ cm; $V_{\max} = 288$ cm³. Obwohl h bei $b \rightarrow 0$ unbegrenzt wächst, geht das Volumen gegen 0.

Lösung 15 · Zylindrischer Eimer ohne Deckel: 10 Liter

Modell: $O = \pi r^2 + 2\pi rh$, $\pi r^2 h = 10$. $h = \frac{10}{\pi r^2}$, also $O(r) = \pi r^2 + \frac{20}{r}$ für $r > 0$; Längen in dm, Oberfläche in dm².

Optimierung: $O'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0$ ergibt $r_0 = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$. $O''(r) = 2\pi + \frac{40}{r^3} > 0$ für alle $r > 0$: eindeutiges globales Minimum.

Ergebnis: Wegen $\pi r_0^3 = 10$ gilt $h_0 = \frac{10}{\pi r_0^2} = r_0 \approx 1,471$ dm = 14,71 cm. $O_{\min} = 3\pi r_0^2 \approx 20,39$ dm².

Extremwertaufgaben

Teil 3 · Ausführliche Musterlösungen

Lösung 16 · Geschlossene Getränkedose: 330 ml

Modell: $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, $h = \frac{330}{\pi r^2}$. $O(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$ für $r > 0$.

Optimierung: $O'(r) = 4\pi r - \frac{660}{r^2} = 0$ ergibt $r_0 = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3,74494$ cm. $O''(r) = 4\pi + \frac{1320}{r^3} > 0$:
eindeutiges globales Minimum. $h_0 = 2r_0 \approx 7,49$ cm; Radius gerundet 3,74 cm.

Allgemeiner Beweis: Für festes $V > 0$ gilt $O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$. Aus $O'(r) = 0$ folgt $V = 2\pi r^3$.
Zusammen mit $V = \pi r^2 h$ folgt $h = 2r$. $O''(r) > 0$ für alle $r > 0$ sichert die globale Minimalität.

Lösung 17 · Geschenkkarton mit zwei gekreuzten Bandschlaufen

Modell: Zwei Schlaufen liefern $2(2a + 2h) = 120$, also $h = 30 - a$. $V(a) = a^2(30 - a) = 30a^2 - a^3$ für $0 < a < 30$; Randuntersuchung auf $[0; 30]$.

Optimierung: $V'(a) = 3a(20 - a) = 0$ ergibt im Sachbereich $a_0 = 20$. $V''(20) = 60 - 120 = -60 < 0$;
 $V(0) = V(30) = 0$.

Ergebnis: Grundkante $a = 20$ cm, Höhe $h = 10$ cm; $V_{\max} = 4000 \text{ cm}^3 = 4$ Liter. Jede Schlaufe ist 60 cm lang.

Lösung 18 · Rundbogenfenster

Modell: $2r + 2h + \pi r = 6$, also $h = 3 - (1 + \frac{\pi}{2})r$. Für positive Maße gilt $0 < r < \frac{6}{2 + \pi}$.

Zielfunktion: $A(r) = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2 = 6r - (2 + \frac{\pi}{2})r^2$. $A'(r) = 6 - (4 + \pi)r = 0$ ergibt $r_0 = \frac{6}{4 + \pi}$;
 $A'' = -(4 + \pi) < 0$.

Globaler Nachweis: Grenzflächen: 0 und $\frac{18\pi}{(2 + \pi)^2} \approx 2,14 \text{ m}^2$. Das Maximum $A(r_0) = \frac{18}{4 + \pi} \approx 2,52 \text{ m}^2$
ist größer. $r = h = \frac{6}{4 + \pi} \approx 0,84 \text{ m}$.

Extremwertaufgaben

Teil 3 · Ausführliche Musterlösungen

Lösung 19 · Draht für Quadrat und Kreis

Modell: Quadratseite $a = \frac{x}{4}$, Kreisradius $r = \frac{100 - x}{2\pi}$. Gesamtfläche $A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(100 - x)^2}{4\pi}$ für $x \in [0; 100]$.

Minimum: $A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{100 - x}{2\pi} = 0$ ergibt $x_0 = \frac{400}{4 + \pi} \approx 56,01$ cm. $A'' = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$: eindeutiges globales Minimum. Für den Kreis bleiben etwa 43,99 cm; $A_{min} = \frac{2500}{4 + \pi} \approx 350,06$ cm².

Maximum: Die Funktion ist streng konvex; daher liegt das Maximum an einem Rand. $A(0) = \frac{2500}{\pi} \approx 795,77$ cm², $A(100) = 625$ cm². Der gesamte Draht wird zum Kreis.

Nur positive Teilstücke: Auf $0 < x < 100$ bleibt das Minimum erhalten. Ein Maximum wird nicht angenommen; das Supremum ist $\frac{2500}{\pi}$ cm² und wird für $x \rightarrow 0$ angenähert.

Lösung 20 · Kostenoptimierte Lagerhalle

Modell: $5xy = 6000$, also $y = \frac{1200}{x}$. Dach und Fundament: $300 \cdot 1200 = 360000$ €. Wandfläche: $2h(x + y) = 10x + \frac{12000}{x}$. Daher $K(x) = 360000 + 1800x + \frac{2160000}{x}$, $x \in [15; 50]$.

Minimum: $K'(x) = 1800 - \frac{2160000}{x^2} = 0$ ergibt $x_0 = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3} \approx 34,64$ m. $K''(x) = \frac{4320000}{x^3} > 0$: eindeutiges globales Minimum. $y = x_0$, $h = 5$ m, $K_{min} = 360000 + 72000\sqrt{3} \approx 484707,66$ €.

Maximum: Wegen der strengen Konvexität genügt der Randvergleich: $K(15) = 531000$ €, $K(50) = 493200$ €. Maximale Kosten: 531000 € bei Breite 15 m, Länge 80 m und Höhe 5 m.

Extremwertaufgaben

Teil 3 · Ausführliche Musterlösungen

Lösung 21 · Gewinnmaximierung bei konstantem Verkaufspreis

Zielfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 20$ auf $[0;8]$.

Innere Kandidaten: $G'(x) = -3(x-1)(x-5) = 0$ ergibt $x = 1$ und $x = 5$. $G''(x) = -6x + 18$; bei 1 liegt ein lokales Minimum, bei 5 ein lokales Maximum.

Globaler Vergleich: $G(0) = -20$, $G(1) = -27$, $G(5) = 5$, $G(8) = -76$, jeweils in Tsd. Euro. Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge beträgt 5 ME, der maximale Gewinn 5000 €.

Einordnung: $E(x) = 30x$ beschreibt einen konstanten Verkaufspreis von 30 Tsd. Euro je ME. Eine fallende Preis-Absatz-Funktion ist in diesem Modell nicht vorgegeben.

Lösung 22 · Stadionoval: maximale rechteckige Innenfläche

Modell: $2l + 2\pi r = 400$, also $l = 200 - \pi r$. Positive Maße verlangen $0 < r < \frac{200}{\pi}$; Randuntersuchung auf $[0; \frac{200}{\pi}]$.

Zielfunktion: $A(r) = 2rl = 400r - 2\pi r^2$. $A'(r) = 400 - 4\pi r = 0$ ergibt $r_0 = \frac{100}{\pi}$. $A'' = -4\pi < 0$; beide Randflächen sind 0.

Ergebnis: $r = \frac{100}{\pi} \approx 31,83$ m, $l = 100$ m, Breite $2r \approx 63,66$ m. $A_{\max} = \frac{20000}{\pi} \approx 6366,20$ m². Optimalisiert wird die rechteckige Innenfläche, nicht die gesamte Ovalfläche.